

Popis řešení projektu LC505 v roce 2006

Řešení projektu plynule navázalo na postup prací v předchozím roce. Výzkum byl organizován ve třech zaměřeních:

1. Diferenciální geometrii s důrazem na algebraické aspekty a nástroje, včetně výzkumu spadajícího do algebraické topologie.
2. Algebraické struktury a jejich aplikace v teoretické informatice
3. Matematická logika a související témata.

Takto byl projekt rozvržen od samotného počátku, strukturace zprávy na dva dílčí cíle, ještě nesprávně pojmenované, vznikla při tvorbě báze bez našeho vlivu. Pro udržení konzistence formulářů a této zprávy je další text strukturován podle dvou oblastí, ovšem s poukazem na tři týmy:

- A. Diferenciální geometrie a algebraická topologie**
- B. Algebraické struktury, včetně aplikací (B1), a matematická logika, včetně aplikací (B2).**

Všechny tři týmy mají vcelku vyrovnanou výkonnost, o čemž svědčí publikační aktivita doložená ve zprávě níže: celkem 9 publikací v týmu A, 7 publikací v týmu B1, mezi nimi ovšem jedna monografie, a 5 publikací v týmu B2. Jde o zjevně narůstající počty publikací za celkem 18 měsíců chodu centra, přičemž obvyklý čas potřebný k publikaci výsledku bývá v matematice cca 3 roky. Daří se tedy dosahovat hlavního cíle projektu, kterým je posílení mezinárodních vztahů a prvotřídního výzkumu.

Dalším hlavním cílem projektu je vytvoření flexibilního pracovního prostředí pro roční postdoktorské pobyty, s možností jednorozhodného prodloužení, na pracovištích centra. I ten se daří realizovat: Přijímáním výjimečně kvalitních zahraničních pracovníků dochází k prolnutí tématik výzkumu a obohacení výzkumné práce všech tří zúčastněných institucí. Ze zprávy je zjevné, že se daří získávat pracovníky, jejichž výkonnost i přes jejich mládí vysoce přesahuje mezinárodní průměr akademických pracovníků. Zároveň jsou zakládány budoucí vztahy a spolupráce ve výzkumu, jejichž dopady bude možné vysledovat až s větším časovým odstupem.

Celkové shrnutí výzkumu na pracovištích centra

Výzkum týmu A probíhal v tradiční velice úzké spolupráci všech tří pracovišť a byl zaměřen na algebraické a analytické aspekty parabolických geometrií a také na topologické záležitosti související s geometrickými strukturami v Pro obě zaměření se podařilo získat velice kvalifikované mladé pracovníky, jejichž dřívější výzkum v zahraničí se velice dobře navázal na místní expertízu. Prohloubila se také spolupráce mezi pracovišti, mimo jiné i pravidelným pořádáním středoevropského semináře v Brně za účasti mladých i zkušených kolegů z Prahy, Vídně a dalších center v ČR.

Obdobně tomu bylo v oblasti algebry, kde dochází k postupnému zblížování všech tří pracovišť, jak je patrné např. v oblasti operadické analýzy a algebry. Společné prezentace výsledků a zájmů se zdařily i s týmem B2 při druhém roce výjezdního mezinárodního semináře v Telči. Ve výzkumu však tým B2 prozatím tvoří víceméně samostatnou část. Jako velice účinná a účelná se jeví forma pořádání malých workshopů zaměřených na dílčí témata jednotlivých týmů.

Pro dobrou přehlednost a ilustraci náplně práce jednotlivých týmů jsou níže rozebrány zejména výkony jednotlivých mladých pracovníků na post-doktorských pozicích.

Pracoviště Centra Eduarda Čecha na Masarykově univerzitě v Brně:

Na centru byl v únoru roku 2006 ukončen pobyt **Mgr. Michala Bulanta, PhD (tým B1)**, který se v rámci centra úspěšně zabýval algebraickou teorií čísel společně s R. Kučerou (Brno) a C. Greitherem (Mnichov). Vypracovaný článek vykázaný již v r. 2005 dosud nevyšel tiskem. Michal Bulant je nadále kmenovým zaměstnancem MU.

Dále k 31.7.2006 skončil pracovní pobyt **Doojina Honga, PhD (tým A)**, který pracoval zejména na spektrálních vlastnostech invariantních diferenciálních operatorů v konformních Riemannových geometriích (zejména ve spolupráci se zesnulým T. Bransonem, Iowa, a Slovákem, Brno). Během pobytu v Brně se mu podařilo nalézt explicitní výrazy pro splétající operátory na funkcích a diferenciálních formách na $S^p \times S^q$ v metrické signatuře (p, q) a na tenzor-spinorech pro Lorentzovskou metriku na $S^1 \times S^{(n-1)}$. Napsal s podporou centra dva články:

- (spolu s Thomas Branson) *Spectrum generating on twistor bundle*, Proceedings Geometry and Physics, 2006, Rendiconti del Circ. Mat. Palermo, to appear, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0606524>.
- (spolu s Thomas Branson) *Translation to bundle operators*, Preprint math.DG/0606552, připraven pro Midwest Geometry Conference 2007, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0606552>.

S podporou centra vykonal během roku 2006 dvě cesty do USA, prvou na University of Wisconsin at Fond du Lac, druhou na IMA Summer program Symmetries and overdetermined systems of PDE v Minneapolis, Minnesota. Doojin Hong je momentálně na výzkumné pozici na univerzitě v Seoul, Korea.

Na základě výběrového řízení byl k 1.8.2007 přijmut na post-doktorské místo **Mgr. Josef Šilhan, PhD (tým A)**, těsně po absolvování studia na univerzitě v Aucklandu, Nový Zéland. Vzhledem k tomu, že je absolventem studia na Masarykově univerzitě a také jeho tematika z Aucklandu je velice blízká odbornému zaměření týmu, velice rychle se zapojil do výzkumu a pokračoval ve spolupráci s Rodem Goverem, který byl také hostem centra. Pokračoval zejména ve studiu konformních variet, na kterých existuje řešení vhodného invariantního přeurčeného operátoru. Byla dokončena práce

- (spolu s Gover, R.); *The conformal Killing equation on forms - prolongations and applications*, Diff. Geom. Appl., to appear, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0601751>.
- (spolu s Gover, R.) *A decomposition theorem for linear operators; applications to Einstein manifolds*, <http://arxiv.org/abs/math.AC/0701377>.

V závěrečné fázi přípravy před publikací je práce

- (spolu s Gover, R.) *Detour complexes on conformally Einstein manifolds*, in progress.

Byl také slibně zahájen výzkum vedoucí ke zobecnění konstrukce invariantních operátorů z diseratace J. Šilhana na další parabolicke geometrie, zejména kvaternionické.

S podporou centra byly uskutečněny zahraniční cesty na Seminar "Representation Theory and Prehomogeneous Vector Spaces", (9.9-13.9, Institut de Recherche Mathématique Avancée ve Strasburgu) a Workshop "Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems" (13.12.-15.12., SISSA, Trieste), kde měl zvanou přednášku na téma "The conformal Killing equation on forms - prolongations and applications".

Valentina Rossi, PhD (tým B1) přijela do Brna krátce po obhájení své PhD. práce o kategoriální Galoisově teorii. V ní hrály důležitou roli faktorizační systémy a jejich teorii se v Brně pod vedením J. Rosického věnovala. Problematika však byla významně rozšířena jednak na obecnější slabé faktorizační systémy, což vede k teorii homotopiím a modelovým kategoriím a dále na speciální faktorizační systémy, které by mohly být použitelné pro přenesení "tilting" teorie z modulů na nekomutativní situace. Od V. Rossi to žádalo prostudování dosti rozsáhlé literatury, na což byl její pobyt v Brně zaměřen. Byly vytvořeny všechny předpoklady k tomu, aby ve spolupráci s J. Rosickým v této oblasti dosáhla nových výsledků. O své PhD. práci V. Rossi přednášela na algebraickém semináři v Brně (Admissible Galois structures and coverings in regular Mal'cev categories, 25.5. a Torsion theories and Galois coverings of topological groups, 15.6.).

Rovněž **Tim van der Linden, PhD (tým B1)** přijel do Brna krátce po své PhD. obhajobě, jeho dizertace se zabývala rozšířením homologií grup na obecné semiabelovské kategorie. V Brně se pod vedením J. Rosického věnoval analogické otázce obecné semiabelovské teorie, výchozí kategorií však nejsou grupy ale okruhy. Technicky se však jedná o zcela jinou záležitost neboť v případě okruhů se jedná o K-teorii a jedním z cílů je i zahrnutí KK-teorie (C^* -algebry rovněž tvoří semiabelovskou kategorii). Pobyt byl rovněž hlavně věnován studiu výchozí literatury, zejména práce G. Garkusha, Homotopy theory of associative rings. T. van der Linden ji však spolu s J. Rosickým doplnil prvními novými pozorováními a předpokládáme, že by v roce 2007 mohla vzniknout jejich společná publikace. V Brně pracoval i na své původní problematice a s podporou centra vznikla publikace

- o (spolu s T. Everaert, M. Gran), *Higher Hopf formulae for homology via Galois Theory*, preprint <http://arxiv.org/abs/math.AT/0701815>, to appear.

Rovněž přednášel o své PhD práci na algebraickém semináři v Brně (*Homology in semi-abelian categories*, 12.10.), přičemž zahrnul i vazby na novou problematiku (*H vs. K: homotopy of rings*, 7.12).

V obou případech šlo o krátkodobé pobyty, které pravděpodobně zahájily další spolupráci a byly velkým obohacením pro práci místního týmu v příslušné oblasti výzkumu. Na základě výběrového řízení a doporučení Rady centra byl pro brněnské pracoviště centra vybrán i **Lukáš Vokřínek, PhD**, po ukončení studia v Aberdeen, Velká Británie. Skutečně pracuje na MU v Brně, je však financován z jiných zdrojů.

Pracoviště Centra Eduarda Čecha na Univerzitě Karlově v Praze

K 15. září 2006 byl po roce ukončen pobyt **Mgr. Pavla Příhody (tým B1)**, který poté nastoupil na stipendijní pobyt v Barceloně. Pavel Příhoda během roku připravil k publikaci dvě práce a třetí je nyní ve stadiu dokončování. V článku

- o *Projective modules are determined by radical factors*, přijat k publikaci v Journal of Pure and Applied Algebra

dokázal, že nekonečně generované projektivní moduly jsou izokorní právě tehdy, když mají izomorfní faktory podle Jacobsenova ideálu. Článek je v tisku a je k dispozici v elektronické podobě na adrese dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.12.004.

Dále zaslal k publikaci článek

- o *Fair-sized projective modules*, zasláno k publikaci,

ve kterém studuje strukturu nekonečně generovaných modulů nad noetherovskými okruhy pomocí speciálních řetězců ideálů. Dosud nedokončeným článkem je společná publikace s L. Facchinim. Její dokončení závisí nyní na spoluautorovi.

Od 1.10. nastoupil na roční pobyt na základě výsledků výběrového řízení **Marcin Kozik, PhD (tým B1)**, z Jagelonské univerzity v Krakově. Marcin Kozik dokončil ještě v roce 2006 článek

- *A finite set of functions with an EXPTIME composition problem*, přijat k publikaci v SIAM Journal on Computing.

V tomto článku dokazuje, že problém, je-li nějaká funkce složením jiných funkcí, má výpočetní složitost EXPTIME. Marcin Kozik byl za své výsledky pozván k přednesení zvaných hlavních přednášek na dvou konferencích v roce 2007, a to na konferenci ALGORITHMIC COMPLEXITY AND UNIVERSAL ALGEBRA, která se bude konat v červenci v Szegedu v Maďarsku, a na WORKSHOP ON UNIVERSAL ALGEBRA AND THE CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEM, který se uskuteční v červnu v Nashvillu v USA.

Jan Trlifaj a R. Goebel (tým B1) dokončili s částečnou podporou Centra Eduarda Čecha (krátkodobé pobyty spoluautora R. Goedela v pobočce na Univerzitě Karlově v Praze) monografii

- *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*, 2006, Walter de Gruyter, Berlin, New York, ISBN 978-3-11-011079-1.

Během krátkodobého pobytu **V. Repnitského** v Centru Eduarda Čecha, pobočce na Univerzitě Karlově v Praze, byla rozpracována společná práce s **J. Tůmou (tým B1)**

- *Intervals in subgroup lattices of countable locally finite groups*, přijat k publikaci v Algebra Universalis.

ve které se dokazuje, že každý algebraický svaz s nejvýše spočetně mnoha kompaktními prvky je izomorfní s intervalem ve svazu podgrup nějaké spočetně lokálně konečné grupy.

S podporou centra dále vznikl článek **Davidu Stavovského (tým B1)**, který pobýval v Centru Eduarda Čecha po dobu pěti měsíců v roce 2005,

- *Subdirectly irreducible non-idempotent left distributive left quasigroups*, přijat k publikaci v časopise Communications in Algebra.

V tomto článku jsou posány neidempotentní subdirektně ireducibilní algebra ve třídě zleva distributivních levých kvazigrup.

Na základě výběrového řízení byl k 1.8.2005 přijat na post-doktorské místo **Alberto Damiano, PhD (tým A)** těsně po dokončení doktorandského studia na George Mason University, Fairfax - VA, USA. Velmi dobrá spolupráce začala ihned po příjezdu s J. Burešem při zkoumání vlastností řešení Rarita-Schwingerovy (RS) rovnic v dimenzi 3. RS rovnice pro několi proměnných tvoří přeuredený systém. Metody algebraické analýzy umožnili popsat rezolventu tohoto systému. Analogický problém se podařilo vyřešit i pro zobecněné RS operátory, které působí na polích s hodnotami ve vyšších spinorových reprezentacích. V druhé polovině roku se práce soustředila na popis analogie Dolbeaultova komplexu ve víc Cliffordových proměnných. Jedná se zejména o explicitní popis tvaru příslušných diferenciálních operátorů v tomto komplexu. Pro první operátory v komplexu jsou využívány metody experimentální matematiky (výpočet pomocí programu Cocoa pro symbolické výpočty). Podstatným nástrojem jsou zde také metody teorie reprezentací. Během návštěvy I. Sabadini se podařilo najít důkaz toho, že komplex sestavený pomocí metod algebraické analýzy a komplex definovaný pomocí metod teorie reprezentací jsou totožné. To umožnilo spojit výhody obou metod (explicitní popis operátorů v jedno případě a důkaz exaktnosti posloupnosti v případě druhém). Vynikly dvě práce:

- *Algebraic analysis of the Rarita-Schwinger system in real dimension 3*, podáno k publikaci
- *Syzygies of multi-variable higher spin Dirac operators on R^3* , podáno k publikaci.

S podporou centra byly uskutečněny zahraniční cesty do Milana (březen 2006); na mezinárodní konferenci „Function theory in higher dimension“ v Tampere, kde měl přednášku (červen 2006), do Janova (červenec 2006), do Telče na mezinárodní výjezdni workshop (listopad 2006).

V rámci podpory centra byla také v souvislosti s pobytem R. Gover V Praze a v Brně vypracována původní vědecká publikace

- A.R. Gover, P. Somberg, V. Souček, *Yang-Mills detour complexes and conformal geometry*, preprint <http://arxiv.org/abs/math.DG/0606401>

Pracoviště Centra Eduarda Čecha v Matematickém ústavu AV ČR

Ke dni 31. 8. 2006 ukončil svůj jednorozční pobyt v Centru **Rafal Walczak, PhD. (tým A)**, který absolvoval doktorské studium na univerzitě ve Wroclawi. Spolu s J. Vanžurou se zabývali studiem 3-forem na vektorovém prostoru dimenze 7. Hlavní pozornost byla věnována vektorovému prostoru 3-forem na vektorovém prostoru dimenze 7. Na tomto prostoru operuje obecná lineární grupa $GL(7, R)$ a prostor se rozpadá na 14 orbit. Bylo potřeba zjistit jak vypadají uzávěry všech těchto orbit. Tento problém byl beze zbytku vyřešen a navíc byly studovány další vlastnosti orbit (souvislost, konvexita aj.) Výsledky lze nalézt v článku

- (spolu s J. Vanžura) *Orbit space of the space of 3-forms*, zasláno do *Linear and Multilinear Algebra*.

Po ukončení své činnosti v Centru R. Walczak nastoupil jako asistent na univerzitě v Opole.

Na problematice 3-forem pracovala rovněž **Hong Van Le (tým A)**. Výsledkem její práce je článek

- *Construction of closed 3-forms of G_2 -type on $S^3 \times S^4$* zasláný do *Journal of Geometry and Physics*.

A. Skelley (tým B2), který ukončil svůj pobyt v centru ke dni 31.9.2006, a **N. Thapen (tým B2)**, který nastoupil 1.9.2006 pracují na stejné problematice a byli již v dřívější době ve vzájemném kontaktu. Oba spolupracovali a spolupracují s J. Krajíčkem na programu NP problémů definovatelných v omezené aritmetice. Bylo dosaženo řady výsledků, které byly prezentovány na jaře 2006 na workshopu v Cambridge a které jsou obsahem článku

- *J. Krajíček; A. Skelley; N. Thapen: NP search problems in low fragments of bounded arithmetic*, vyjde v *Journal of Symbolic Logic*.

Ve výzkumu potom oba pokračovali vyšetřováním obecného případu těchto problémů pomocí metod důkazové složitosti, za účelem separace těchto problémů. Výsledkem je článek

- *Skelley; N. Thapen: A resolution lower bound for a principle capturing the hardness of depths-1 LK*. Článek byl nabídnut do sborníku symposia *Symposium on Logic in Computer Science 2007*.

N. Thapen rovněž spolupracoval s L. Kolodziejczykem, hostem z Varšavy. Studovali strukturu modelů omezené aritmetiky. Společně napsali článek, který se zabývá lineárními a polynomiálními časovými hierarchiemi v těchto modelech za kryptografických předpokladů. Jsou to články:

- *L.A. Kolodziejczyk; N. Thapen: The polynomial and linear hierarchies in models where the weak pigeonhole principle fails*, zasláný do *Journal of Symbolic Logic*

- *L.A. Kolodziejczyk; N. Thapen: The polynomial and linear hierarchies in V^0* , přijato na konferenci Computability in Europe 2007 v Sieně ve formě zvané přednášky. Zároveň je článek přijatý do sborníku této konference.

A. Skelley rovněž ukončil výzkum, který započal již ve své doktorské práci, a který se týká posílení a rozvinutí vztahů mezi výpočtovou složitostí a omezenou aritmetikou. Popsal tři teorie s definovatelnými funkcemi z úrovně exponenciálně časové hierarchie spolu s rekurzivně teoretickým kalkulem funkcí pro tuto oblast. Tyto výsledky byly prezentovány na CiE konferenci ve Walesu minulý rok a tvoří obsah článku

- *Skelley: Third order computation and bounded arithmetic*, který vyjde ve speciálním svazku časopisu Journal of Logic and Computation.