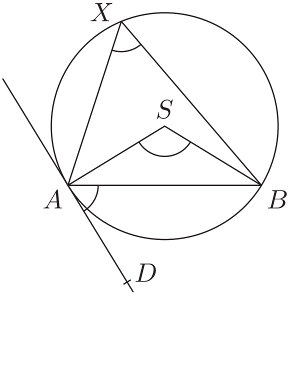
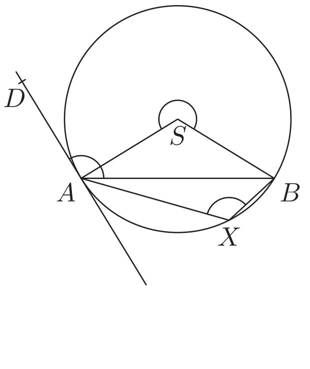
MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Jiří Herman
Radan Kučera
Jaromír Šimša

SEMINÁŘ ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY





Brno 2004 **Druhé vydání**

MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

J. Herman, R. Kučera, J. Šimša

SEMINÁŘ ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Brno 2004

© Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša, 1994
ISBN 80–210–3528–5

SEMINÁŘ ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

RNDr. Jiří Herman, Ph.D.
Doc. RNDr. Radan Kučera, CSc.
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Vydala Masarykova univerzita v Brně roku 2004

Druhé, přepracované vydání, 2004
Vysázeno systémem AMS-TEX
Tisk: GRAFEX Blansko
51 stran
2,75 AA – 2,95 VA

Náklad 500 výtisků
Pořadové číslo 4031–17/31–Př8/04
ISBN 80–210–3528–5
Doporučená cena: 40,– Kč

Tato publikace neprošla redakční ani
jazykovou úpravou v redakci vydavatele.

§1: RACIONÁLNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

• Při hledání rozkladu mnohočlenu v **R** na součin mnohočlenů nižšího stupně používáme *Bezoutovu větu:*
Je-li x_0 kořen mnohočlenu $F(x)$ stupně n, pak existuje mnohočlen $G(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že platí

$$F(x) = (x - x_0) \cdot G(x).$$

• Má-li mnohočlen $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ celé koeficienty a platí-li $a_0 \neq 0$ a $a_n \neq 0$, leží všechny jeho racionální kořeny v množině všech zlomků $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla taková, že $p|a_0$ a $q|a_n$.
• Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$ a $a \neq 0$, platí vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$ je tzv. *diskriminant*. Kořeny jsou reálné, právě když $D \geq 0$, přitom je-li $D = 0$, je $x_1 = x_2$ (tzv. *dvojnásobný* kořen).
• Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty a, b, c kvadratické rovnice platí tzv. *Viétovy* vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

• Každý mnohočlen v **R** lze rozložit na součin činitelů, z nichž každý je lineární nebo kvadratický se záporným diskriminantem. Žádný z těchto mnohočlenů nelze v **R** rozložit na součin činitelů nižšího stupně.
• Obsahuje-li algebraická rovnice *absolutní hodnotu*, je zpravidla vhodné rozdělit řešení na etapy podle znamének výrazů v absolutní hodnotě. Stojí-li absolutní hodnota osamocena na jedné straně rovnice, je někdy výhodné takovou rovnici umocnit na druhou.
• Nerovnice s racionální funkcí řešíme zpravidla *metodou intervalů*: nerovnici upravíme na tvar $P(x) \cdot Q(x) > 0$, resp. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, rozložíme oba mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ v **R** a číselnou osu x rozdělíme na intervaly, v nichž žádný činitel nemění znaménko. Násobíme-li nerovnici výrazem s proměnnou, je nutné brát ohled na znaménko tohoto výrazu.
• Při řešení kvadratických nerovnic (s parametry) je výhodné uplatnit následující větu:
Nechť $F(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ a $D = b^2 - 4ac$. Pak platí:
(i) $F(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$, právě když $D < 0$.
(ii) Je-li $D > 0$, má rovnice $F(x) = 0$ dva reálné kořeny $x_1 < x_2$, přitom

$$F(x) > 0 \iff (x < x_1 \vee x > x_2),$$
$$F(x) < 0 \iff x_1 < x < x_2.$$

1. seminář

1. Rozložte v **R**:

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$
b) $x^3 - 6x^2 - x + 30$
c) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$
d) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$
e) $9x^3 - 15x^2 - 32x - 12$

2. Řešte v **R** rovnice s parametry $a, b \in \mathbf{R}$:

a) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$
b) $ax^2 + 2x + 1 = 0$
c) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2 - a^2}$
d) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, kde $ab \neq 0$

3. Pro která $a \in \mathbf{R}$ má rovnice $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$ dva různé reálné kořeny? Určete jejich znaménka.

4. Označme x_1, x_2 kořeny rovnice $3x^2 + 8x + 4 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo m, kde

a) $m = x_1^2 + x_2^2$
b) $m = x_1^3 + x_2^3$
c) $m = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$
d) $m = x_1 - x_2$
e) $m = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$
f) $m = x_1^2 - x_2^2$

5. Nalezněte kvadratickou rovnici s racionálními koeficienty, jejímž jedním kořenem je $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

6. Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$ má dvojnásobný kořen rovnice

$$(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0.$$

7. Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

dva reálné různé kořeny.

8. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$ tak, aby obě rovnice

a) $\begin{aligned} (1-2a)x^2 - 6ax - 1 &= 0 \\ ax^2 - x + 1 &= 0 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} x^2 + ax + 8 &= 0 \\ x^2 + x + a &= 0 \end{aligned}$

měly aspoň jeden společný kořen.

2. seminář

9. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnice:

a) $|x^2-3x+3|=2$

b) $|x^2+x-1|=2x-1$

c) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$

d) $|x^2-1|+x+1=0$

e) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$

10. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnice:

a) $(x^2+4)(x^2-x-2)(x^2-x-12)>0$

b) $\dfrac{(x^2+x+1)(x^2+x-2)(x^2-8x+15)}{(x+4)(x^2+2x+5)}<0$

c) $3x^3-14x^2+20x>8$

d) $\dfrac{x^4+10x^2+1}{x^2-4x-5}<0$

e) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}>\dfrac{4}{3}$

f) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}<2$

g) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}\leq\dfrac{6}{x-1}$

h) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}<1$

i) $1<\dfrac{3x-1}{2x+1}<2$

j) $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}\geq\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$

k) $|x|>\dfrac{1}{x}$

l) $x^2-3|x|+2>0$

m) $x|x|-4x+3<0$

n) $\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}\right|>1$

o) $|x^2-2x-3|\leq 3(x-1)$

p) $|x^2-3x+2|\leq 2x-x^2$

q) $|x^2-4x|+3\geq x^2+|x-5|$

r) $\big(|x-1|-3\big)\big(|x+2|-5\big)<0$

s) $\big||x-2|-x+3\big|<5$

t) $\big|2x-|3-x|-2\big|\leq 4$

11. Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathbf{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro každé $x\in A$:

a) $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0,\ \ A=\mathbf{R}$

b) $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0,\ \ A=\mathbf{R}$

c) $(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0,\ \ A=\mathbf{R}$

d) $ax^2-4x+3a+1>0,\ \ A=\mathbf{R}^+$

e) $(x-3a)(x-a-3)<0,\ \ A=\langle 1;3\rangle$

12. Určete všechny hodnoty parametru $b\in\mathbf{R}$ tak, aby soustava dvou nerovností

$$-6<\frac{2x^2+bx-4}{x^2-x+1}<4$$

platila pro každé $x\in\mathbf{R}$.

13. Určete, kdy pro kořeny x_1, x_2 rovnice

$$2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$$

platí $x_1<a<x_2$.

14. Určete, kdy pro kořeny x_1, x_2 rovnice

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

§2: IRACIONÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE

Iracionálními nazýváme rovnice a nerovnice, ve kterých neznámá vystupuje v jednom či více výrazech pod odmocninou. Nejjednodušší příklady lze řešit metodou *substituce*, kdy odmocninu z výrazu s neznámou nahradíme novou neznámou.

Základní obrat v řešení iracionálních rovnic spočívá v odstranění zastoupené odmocniny z rovnice tím, že odmocninu nejprve *osamostatníme* na jedné straně a poté obě strany rovnice *umocníme*. Protože umocnění na sudý stupeň je v oboru **R** *důsledková úprava*, je při takovém postupu nutnou součástí řešení *zkouška* všech nalezených kořenů jejich dosazením do původní rovnice. U rovnice s více odmocninami je často nutné provést popsaný obrat vícekrát za sebou.

Nerovnice s osamostatněnou odmocninou zpravidla hned neumocňujeme, nýbrž nejdříve zjistíme definiční obor dané odmocniny a ten pak rozdělíme na části (většinou intervaly), na kterých je druhá strana nerovnice kladná, nulová či záporná. Teprve poté posuzujeme danou nerovnici v těchto jednotlivých intervalech, přitom k umocnění nerovnice přistupujeme pouze tehdy, mají-li obě strany nerovnice totéž znaménko (je-li záporné, napíšeme u umocněné nerovnice opačný znak nerovnosti.) Tím zaručíme, že provedené umocnění je ve zkoumaném dílčím oboru *ekvivalentní úprava*.

1. Řešte v **R** rovnice:

a) $\dfrac{x-4}{2+\sqrt{x}} = x - 8$

b) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3 \cdot \sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = 4$

c) $\sqrt{7-x} = x - 1$

d) $2 + \sqrt{4 + 2x - x^2} = x$

e) $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x} = 1$

f) $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$

g) $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$

h) $\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$

i) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$

j) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$

k) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$

l) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

2. Řešte v **R** nerovnice:

a) $2\sqrt{x-1} < x$

b) $x + \sqrt{x+18} < 2$

c) $\sqrt{5-2x} \geq 6x - 1$

d) $\sqrt{x+78} - 6 > x$

e) $\sqrt{2x-x^2} < 5 - x$

f) $x + 4 > 2\sqrt{4-x^2}$

g) $3 > x + 3 \cdot \sqrt{1-x^2}$

h) $\sqrt{x^2+1} > x - 1$

i) $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x + 2$

j) $4 > x + \sqrt{x^2-2x}$

k) $\sqrt{6x-x^2-5} + 2x > 8$

l) $3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$

m) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$

n) $\dfrac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$

§3: EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

• Mocnina a^x je definována v těchto případech
(i) $a \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{N}$
(ii) $a \in \mathbf{R} - \{0\}$; $x \in \mathbf{Z}$
(iii) $a \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$; $x \in \mathbf{R}^+$
(iv) $a \in \mathbf{R}^+$; $x \in \mathbf{R}$
• Základní vlastnosti mocnin:

$$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$
$$a > 0 \implies \big(a^x = a^y \iff (a = 1 \vee x = y)\big)$$

• Číslo $x = \log_a b$ definujeme vztahem $a^x = b$ pro všechna $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ a $b \in \mathbf{R}^+$. Místo $\log_{10}$ píšeme pouze log. Základní vlastnosti logaritmů jsou uvedeny ve cvičení 1.

• Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic lze v mnoha případech užít vhodné substituce a převést je na základní rovnici $a^x = b$, resp. $\log_a x = b$, nebo na základní nerovnici $a^x > b$, resp. $\log_a x > b$. U takových nerovnic využíváme následující pravidla:
(i) je-li $a > 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x < y; \qquad \log_a x < \log_a y \iff x < y$$

(ii) je-li $0 < a < 1$, pak

$$a^x < a^y \iff x > y; \qquad \log_a x < \log_a y \iff x > y$$

1. seminář

1. Z vlastností mocnin odvoďte vzorce a) – g):

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$

d) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$

e) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

f) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

g) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

2. Určete číslo m, je-li:

a) $m = 49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$

b) $m = \log\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}$

c) $m = 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$

d) $m = \log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \log_4\left(\frac{9}{4}\right)$

e) $m = 3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$

f) $m = \dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_4 9} - \dfrac{1}{\log_8 3}$

g) $m = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$

3. Pomocí čísel a, b, c vyjádřete číslo x:

a) $x = \log_{100} 40;\quad a = \log_2 5$
b) $x = \log_6 16;\quad a = \log_{12} 27$
c) $x = \log\frac{1}{300};\quad a = \log 2,\quad b = \log 3,\quad c = \log 5$
d) $x = \log_{140} 63;\quad a = \log_2 3,\quad b = \log_3 5,\quad c = \log_7 2$

4. Zjednodušte výraz $V = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$.

5. Dokažte následující implikace:

a) $a^2 + b^2 = 7ab \implies \log\dfrac{a+b}{3} = \dfrac{\log a + \log b}{2}$

b) $a^2 + 9b^2 = 10ab \implies \log_3\dfrac{a+3b}{4} = \dfrac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$

6. Řešte v $\mathbf{R}$ následující rovnice:

a) $2^x + (0,5)^{2x-3} - 6\cdot(0,5)^x = 1$

b) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

c) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

d) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

e) $|x|^{x^2-2x} = 1$

f) $10^x - 5^{x-1}\cdot 2^{x-2} = 950$

g) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$

h) $3\cdot 16^x + 37\cdot 36^x = 26\cdot 81^x$

i) $6\cdot 9^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 4^x = 0$

j) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \dfrac{7}{5} = 2^x$

k) $4^x + 6^x = 2\cdot 9^x$

2. seminář

7. Řešte v $\mathbf{R}$ následující rovnice:

a) $\log(\frac{9}{2} - x) = \log\frac{9}{2} - \log x$

b) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$

c) $\log 5 + \log(x + 10) = 1 - \log(2x - 1) + \log(21x - 20)$

d) $\log_4 \log_2 \log_3(2x - 1) = \frac{1}{2}$

e) $\log(20 - x) = \log^3 x$

f) $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$

g) $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$

h) $\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$

i) $x^{\log x} = 10^3 x^2$

j) $x^{\log_3 x + 1} = 9x^2$

k) $16^{\log_x 2} = 8x$

l) $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1$

m) $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$

n) $\log\sqrt{1 + x} + 3\log\sqrt{1 - x} = \log\sqrt{1 - x^2} + 2$

o) $x^{\log_a x} = a^{\log_a^3 x}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$

8. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnice:

a) $\dfrac{1}{2^x - 1} > \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$

b) $\dfrac{1}{2^x + 3} > \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}$

c) $\dfrac{1}{3^x + 5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$

d) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

e) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

f) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$

g) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

h) $\log_{0,7} \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x} < 0$

i) $\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 0$

j) $\log_{0,1}(x^2 + 1) < \log_{0,1}(2x - 5)$

k) $\log_x(x + 2) > 2$

l) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$

m) $\log_x |x^2 - 1| > 0$

n) $\log_x \sqrt{20 - x} > 1$

o) $\log_x(x + 1) > \log_{\frac{1}{x}}(2 - x)$

p) $\log_{x^2}(2 + x) < 1$

q) $\log_{|x-1|} 0,5 < 0,5$

r) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$

s) $\log_{(x-2)}(2x - 3) > \log_{(x-2)}(24 - 6x)$

t) $\sqrt{\log_2 \dfrac{3 - 2x}{1 - x}} > 1$

u) $x^{\log_2 x} > 2$

v) $2^x \geq 11 - x$

w) $(x^2 + x + 1)^x < 1$

x) $\dfrac{1}{\log_a x} > 1$, kde $a > 1$

y) $\log_a x > 6\log_x a - 1$, kde $a \in (0, 1)$

§4: GONIOMETRICKÉ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE

Goniometrické funkce *sinus* a *kosinus* s reálným argumentem definujeme jako souřadnice bodů na jednotkové kružnici se středem v počátku kartézské souřadné soustavy. Dále definujeme:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{pro} \quad x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{pro} \quad x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi\}$$

Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi jsou uvedeny v následujícím přehledu:

(i) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$

(ii) $\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$

$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x$

(iii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$

(iv) $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$

$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$

(v) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$

(vi) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

(vii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

(viii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(ix) $|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\quad |\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

(x) $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

1. seminář

1. Za předpokladu, že výrazy na obou stranách identit mají smysl, dokažte:

a) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x$

b) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

c) $(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)\sin 2x = \operatorname{tg} 2x$

d) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}$

e) $\frac{\operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg}\varphi} = \sin 2\varphi$

f) $\frac{\operatorname{tg} 3z}{\operatorname{tg} z} = \frac{3-\operatorname{tg}^2 z}{1-3\operatorname{tg}^2 z}$

g) $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \cos(\pi-\alpha) = 1$

h) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

i) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} 3x$

j) $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \frac{1}{4}(3 + \cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha$

k) $\sin\alpha\cos(\beta-\alpha) + \cos\alpha\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta$

l) $\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)$

m) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin 2\alpha$

n) $1 + \cos 2x\cos 2y = 2\sin^2 x\sin^2 y + 2\cos^2 x\cos^2 y$

o) $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$

p) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$

q) $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 0$

r) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$

s) $\sin 50^\circ \sin 24^\circ(\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 66^\circ) + \sin 74^\circ = 2\cos 16^\circ$

2. Vypočtěte bez tabulek a kalkulaček:

a) $\cos 15^\circ$

b) $\operatorname{tg} 75^\circ$

c) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ$

d) $\sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \operatorname{tg} 340^\circ$

e) $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$

3. Pomocí čísla u určete číslo z:

a) $z = \sin x;\ \ u = \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};\ \ x \in (0, \pi)$

b) $z = \operatorname{tg} x;\ \ u = \cos x = -\frac{3}{5};\ \ x \in (\pi, 2\pi)$

c) $z = \sin 2x;\ \ u = \operatorname{cotg} x = -2$

d) $z = \dfrac{5\sin x + 7\cos x}{6\cos x - 3\sin x};\ \ u = \operatorname{tg} x = \dfrac{4}{15}$

e) $z = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);\ \ u = \sin\alpha = -\frac{12}{13};\quad \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

f) $z = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2\alpha};\ \ u = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{5}$

4. Zjednodušte dané výrazy:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

c) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$

d) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}$

e) $4\cos^4\alpha - 2\cos 2\alpha - 3\sin^2 2\alpha - 2\cos 4\alpha$

5. Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka ABC platí:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

d) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

2. seminář

6. Řešte v **R** rovnice:

a) $\sin 2x = \sin x$

b) $2\cos x \cos 2x = \cos x$

c) $\cos 3x + \sin 3x = 0$

d) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$

e) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$

f) $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$

g) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x;\quad x \in \langle \pi, 3\pi \rangle$

h) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$

i) $\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1$

j) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$

k) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$

l) $\sin x \cos x = \cos^4 x + \sin^4 x$

m) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$

n) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$

o) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

p) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

q) $\cos 3x + \sin 5x = 0$

r) $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

s) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

t) $8\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 6x}{\sin x}$

u) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$

v) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = 1$

w) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$

x) $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$

y) $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$

z) $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$

7. V množině A řešte nerovnice s neznámou x:

a) $\sin x > \dfrac{1}{2};\quad A = \mathbf{R}$

b) $\operatorname{tg} x \le -\sqrt{3};\quad A = \mathbf{R}$

c) $\sin x < \cos x;\quad A = \mathbf{R}$

d) $\sin 3x < \sin x;\quad A = \langle -\pi, \pi \rangle$

e) $\sin 2x + \sin x \le 0;\quad A = (0, 2\pi\rangle$

f) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \ge 0;\quad A = \mathbf{R}$

g) $\sin x + \cos x < \dfrac{1}{\cos x};\quad A = \langle -\pi, \pi \rangle$

h) $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x;\quad A = \langle 0, 2\pi \rangle$

i) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0;\quad A = \langle 0, 2\pi \rangle$

j) $\sin \dfrac{\pi}{x} > 0;\quad A = \mathbf{R}$

k) $5\sin^2 x + \sin^2 2x > 4\cos 2x;\quad A = \mathbf{R}$

l) $\cos^2 2x + \cos^2 x \le 1;\quad A = \mathbf{R}$

m) $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x;\quad A = \langle 0, 2\pi \rangle$

n) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x;\quad A = \left\langle \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2} \right\rangle$

§5: KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel (tj. kartézský součin $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$), na které jsou následujícím způsobem definovány operace sčítání a násobení

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\quad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

nazýváme *tělesem komplexních čísel* $\mathbf{C}$. Každé reálné číslo a ztotožňujeme s komplexním číslem $(a,0)$. Komplexní číslo $(0,1)$ nazýváme imaginární jednotkou a značíme i. Podle definice násobení platí

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0),\quad \text{tj.}\quad \mathrm{i}^2=-1.$$

Každé komplexní číslo $z=(a,b)$ lze psát ve tvaru

$$(a,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0),\quad \text{tj.}\quad z=a+\mathrm{i}b;$$

poslední je tzv. *algebraický tvar* komplexního čísla, přitom číslo a se nazývá *reálnou částí*, číslo b – *imaginární částí* čísla z (označení $a=\operatorname{Re}z$, $b=\operatorname{Im}z$). Komplexní číslo $(0,b)=\mathrm{i}b$ ($b\in\mathbf{R}$, $b\neq 0$) se nazývá *ryze imaginární*. Číslo $(a,-b)=a-\mathrm{i}b$ se nazývá *komplexně sdružené* k číslu $z=(a,b)=a+\mathrm{i}b$ a značí se $\overline{z}$.
Komplexní čísla znázorňujeme v tzv. *Gaussově rovině*. Jde o rovinu s kartézským souřadnicovým systémem s osami x, y, v níž každé komplexní číslo $z=(x,y)=x+\mathrm{i}y$ je ztotožněno s bodem o souřadnicích $[x,y]$; vzdálenost tohoto bodu od počátku souřadnic se nazývá *absolutní hodnota* komplexního čísla z a značí se $|z|$:

$$|z|=\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}.$$

Číslo $|z_1-z_2|$ udává vzdálenost komplexních čísel z_1,z_2 v Gaussově rovině. Je-li $z\neq 0$, pak každé číslo $\varphi\in\mathbf{R}$ s vlastností

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}z}{|z|}\quad \text{a}\quad \sin\varphi=\frac{\operatorname{Im}z}{|z|}$$

se nazývá argumentem komplexního čísla z (označení $\arg z$). Zápis $z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ je pak tzv. *goniometrický tvar* komplexního čísla. Pro násobení komplexních jednotek (tj. čísel $z\in\mathbf{C}$, pro něž $|z|=1$) platí

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta).$$

Odtud je možné snadno odvodit *Moivreovu větu*

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha\quad (\alpha\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}).$$

Při počítání s komplexními čísly často používáme následující pravidla

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ |\overline{z}| = |z|, |z|^2 = z \cdot \overline{z}, \ \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Komplexní n-tou odmocninou čísla $z \in \mathbf{C}$ se nazývá každé řešení w rovnice $w^n = z$ a značí se $\sqrt[n]{z}$. Je-li $z \neq 0$, pak $\sqrt[n]{z}$ má právě n různých hodnot

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

kde $\varphi = \arg z$ a $\sqrt[n]{|z|}$ značí kladné reálné číslo, jehož n-tá mocnina se rovná $|z|$.

1. seminář

1. Ověřte, že násobení komplexních čísel splňuje asociativní zákon.

2. Zapište v algebraickém tvaru čísla:

a) $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

c) $\dfrac{1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 - 3\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6}{1 - 5\mathrm{i}}$ d) $\left(\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2$

e) $\mathrm{i}^{28} + \mathrm{i}^{95} + \mathrm{i}^{122} + \mathrm{i}^{-7}$ f) $\dfrac{2-a}{1 - \mathrm{i}\sqrt{1-a}}$, $(a \in \mathbf{R},\ a \leq 1)$.

3. Určete reálná čísla a, b, platí-li:

a) $a(1+2\mathrm{i}) + b(1-\mathrm{i}) = 3$ b) $a(3-4\mathrm{i}) + b(1+\mathrm{i}) = 3 - 11\mathrm{i}$

4. Vypočtěte:

a) $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ b) $\left|\dfrac{5+12\mathrm{i}}{8-6\mathrm{i}}\right|$

c) $\left|(3+4\mathrm{i})^{99}\right|$ d) $\dfrac{|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$

5. Určete druhou odmocninu (s pomocí soustavy rovnic pro její reálnou a imaginární část):

a) $\sqrt{-5+12\mathrm{i}}$ b) $\sqrt{3-4\mathrm{i}}$

c) $\sqrt{-\frac{15}{4} + 2\mathrm{i}}$

6. Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathbf{C}$:

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ b) $z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0$

c) $2(1+\mathrm{i})z^2 - 4(2-\mathrm{i})z - 5 - 3\mathrm{i} = 0$

d) $(1-\mathrm{i})z^2 - 2(4+\mathrm{i})z + 3 + 11\mathrm{i} = 0$

e) $|z| - z = 1 + 2\mathrm{i}$ f) $|z| + z = 2 + \mathrm{i}$

g) $\overline{z} = z^3$ h) $z^2 + |z| = 0$

2. seminář

7. Zapište v goniometrickém tvaru čísla:

a) i b) $1-\mathrm{i}$

c) $-0,25(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$ d) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

8. Vypočtěte:

a) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5$ b) $(1+\mathrm{i})^{25}$

c) $\dfrac{\cos 76^\circ+\mathrm{i}\cos 14^\circ}{2(\cos 46^\circ+\mathrm{i}\cos 44^\circ)}$ d) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}} \quad (n\in\mathbf{N})$

e) $(1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n \quad (n\in\mathbf{N},\ \alpha\in\mathbf{R})$.

9. Vyjádřete $\sin n\alpha$ a $\cos n\alpha$ pomocí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ postupně pro hodnoty $n=2,3,4$ a pak pro obecné n.

10. Pro čísla $\alpha\in\mathbf{R}$ a $z\in\mathbf{C}$ platí $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$. Dokažte, že pak $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\alpha$ pro každé celé $n\geq 1$.

11. Dokažte, že pro každé $\alpha\in\mathbf{R}$ a každé $n\in\mathbf{N}$ platí

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n=\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha},$$

mají-li obě strany rovnosti smysl.

12. Určete odmocniny v komplexním oboru:

a) $\sqrt{-4}$ b) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ c) $\sqrt[4]{-1+\mathrm{i}}$ d) $\sqrt[5]{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$

13. Dokažte, že je-li $\alpha,\varphi\in\mathbf{R}$ a $\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$, pak

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\cdots+\sin(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

a

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cdots+\cos(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

pro každé $n\in\mathbf{N}$. Jak se změní tyto vzorce, pokud $\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$?

14. V Gaussově rovině znázorněte obor pravdivosti následujících rovnic a nerovnic:

a) $\operatorname{Im} z = 0$ b) $\operatorname{Re} z > 0$ c) $|z| = 4$
d) $|z - \mathrm{i}| \leq 1$ e) $\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ f) $|z + 2 - \mathrm{i}| > 2$
g) $|z - 1| = |z - 3|$ h) $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$ i) $|z + 1| + |z - 1| = 5$
j) $|z + 2| = |\operatorname{Re} z|$ k) $|z + 2\mathrm{i}| = 2|z + \mathrm{i}|$ l) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$
m) $|z - 1| = |z + 1| + 3$ n) $1 < |3\mathrm{i}z - 1| < 3$ o) $\left|\dfrac{z - 2}{z + 3}\right| = 1$
p) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = 1$ q) $\operatorname{Re}((2 + \mathrm{i})z) = 1$ r) $|z| + z = 0$

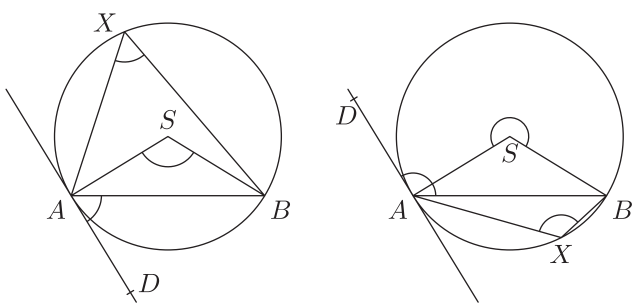
§6: ZÁKLADY PLANIMETRIE

V tomto paragrafu se budeme věnovat základním vlastnostem přímek a kružnic v rovině.

• *Věta o středovém a obvodovém úhlu.* Je-li $\triangle ABX$ vepsán do kružnice o středu S, pak

$$|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle AXB|$$

(viz obr.). Je-li AD tečna k této kružnici s bodem dotyku A, pak $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle AXB|$. Úhly AXB, ASB, DAB nazýváme po řadě *obvodový, středový* a *úsekový* příslušný dané tětivě AB (resp. danému oblouku $\widehat{AB}$).



• *Věta o mocnosti bodu ke kružnici.* Je-li $k(S, r)$ kružnice a A libovolný bod v rovině, pak veličina (kladná, nulová či záporná)

$$m_A = |SA|^2 - r^2$$

se nazývá mocností bodu A ke kružnici k. Jsou-li X, Y dva různé body kružnice k takové, že přímka XY prochází bodem A, pak platí

$$|m_A| = |AX| \cdot |AY|.$$

Je-li $m_A > 0$, pak v limitním případě $X = Y = T$, kdy přímka AT je tečnou kružnice k s bodem dotyku T, platí

$$m_A = |AT|^2.$$

• *Speciální čtyřúhelníky.* Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je *tětivový* (tj. některá kružnice prochází všemi jeho vrcholy), právě když součet dvou vnitřních protilehlých úhlů tohoto čtyřúhelníka je 180°. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je *tečnový* (tj. všechny jeho strany se dotýkají některé kružnice), právě když součty délek protilehlých stran tohoto čtyřúhelníka jsou stejné.

1. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dána přímka p, na níž leží strana AB, a body A_0, B_0 - paty výšek z vrcholů A a B.

2. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_1 > r_2$, mají vnitřní dotyk v bodě N. Úsečka MN je průměrem kružnice k_1, tětiva MK kružnice k_1 se dotýká k_2 v bodě C. Dokažte, že přímka NC je osou úhlu MNK.

3. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_1 > r_2$, mají vnitřní dotyk v bodě N. Nechť tětiva AB kružnice k_1 se dotýká k_2 v bodě C. Dokažte, že přímka NC je osou úhlu ANB.

4. Je dána přímka t a dva různé body A, B, které na ní neleží. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky t a prochází body A a B.

5. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ mají vnější dotyk v bodě T. Tímto bodem jsou vedeny přímky a, b, které jsou sečnami obou kružnic. Přímka a (resp. b) protíná kružnice k_1, k_2 ještě po řadě v bodech A, B (resp. C, D). Dokažte, že přímky AC a BD jsou rovnoběžné.

6. Nad průměrem AB je sestrojena polokružnice k o středu S. K libovolnému bodu $X \in k$ sestrojme na polopřímce SX bod Y tak, že jeho vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB. Určete množinu všech bodů Y.

7. Nad průměrem AB je sestrojena polokružnice k o středu S. Z každého bodu M přímky AB, který neleží na úsečce AB, veďme polopřímku p, která se dotýká polokružnice k, na ní sestrojme bod X tak, aby platilo $|MX| = |MS|$. Nalezněte množinu všech bodů X.

8. Je dán čtverec $ABCD$ se středem S a kružnice k tomuto čtverci vepsaná. Určete množinu všech bodů X s touto vlastností: K bodu X existuje na kružnici k bod Y tak, že X leží na úsečce SY a délka $|XY|$ je rovna vzdálenosti bodu Y od obvodu čtverce $ABCD$.

9. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se dotýká jeho stran AB, AC v bodech M, resp. N. Nechť P je průsečík přímky MN a osy úhlu ABC. Dokažte, že úhel BPC je pravý.

§7: SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Řešení následujících úloh usnadní užití *shodných zobrazení* (tj. zobrazení množiny bodů v rovině na sebe, která zachovávají délky úseček a velikosti úhlů mezi nimi). Při řešení úloh 1. semináře uplatníte vlastnosti *středové souměrnosti* a *posunutí*, ve 2. semináři pak *osové souměrnosti* a *otáčení*.

1. seminář

1. Společným bodem A kružnic k_1, k_2 veďte přímku p tak, aby na ní obě kružnice vytínaly shodné tětivy.

2. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno:

a) t_a, t_b, γ

b) t_a, v_b, v_c

c) t_a, v_c, γ

3. Je dán úhel XCY a jeho vnitřní bod T. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby bod T byl jeho těžištěm, $A \in CX$, $B \in CY$.

4. Je dána kružnice k, její průměr PQ a tětiva AB, která s průměrem PQ nemá společný bod, a vnitřní bod S tětivy AB. Sestrojte na kružnici k bod Z tak, aby úsečky PZ, QZ vytínaly na tětivě AB úsečku XY, jejímž středem je daný bod S.

5. Je dána kružnice k, její dvě rovnoběžné tečny t_1, t_2 a kladné reálné číslo a. Sestrojte rovnostranný $\triangle ABC$ o straně délky a tak, aby $A \in t_1$, $B \in t_2$, $C \in k$.

6. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: $e = |AC|$, $f = |BD|$, $c = |CD|$, $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, $\varphi = |\sphericalangle AVB|$, kde V je průsečík úhlopříček AC a BD.

7. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodech A, B. Veďte bodem A přímku p, která protíná kružnice k_1, k_2 ještě po řadě v bodech X a Y tak, aby úsečka XY měla danou délku a.

8. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte přímku q rovnoběžnou s přímkou p tak, aby platilo (i), resp. (ii):

(i) kružnice k_1, k_2 vytínají na přímce q tětivy stejné délky;

(ii) vzdálenost mezi vhodnými průsečíky $X \in k_1 \cap q$ a $Y \in k_2 \cap q$ má danou velikost a.

9. Je dána kružnice k, její průměr PQ a tětiva AB, která průměr PQ neprotíná. Na kružnici k sestrojte bod Z tak, aby úsečky PZ a QZ vytínaly na tětivě AB úsečku XY dané délky a.

2. seminář

10. Je dána přímka p a v jedné polorovině jí určené dva různé body A, B. Nalezněte na přímce p bod X tak, aby délka lomené čáry AXB byla co nejmenší.

11. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno c, v_c, $\alpha - \beta$.

12. Je dána přímka MN a dva různé body A, B v jedné polorovině jí určené. Na přímce MN sestrojte bod X tak, aby $|\sphericalangle AXM| = 2 \cdot |\sphericalangle BXN|$.

13. Je dána kružnice $k(S,r)$ a bod A tak, že $|SA| > r$. Nalezněte takový vnitřní bod X úsečky AS tak, aby $|AX| = |XT|$, kde T je bod dotyku tečny vedené z bodu X ke kružnici k.

14. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a bod A na p. Nechť M je libovolný bod rovnoběžkového pásu určeného přímkami p, q. Sestrojte rovnoramenný $\triangle ABC$ se základnou AB tak, aby současně platilo $B \in q$, $C \in p$ a $M \in BC$.

15. Je dána kružnice $k(S,r)$, úsečka délky a ($a < 2r$) a bod M tak, že $0 < |SM| < r$. Sestrojte tětivu XY kružnice k tak, aby $M \in XY$ a $|XY| = a$.

16. Jsou dány různoběžky a, b, a mimo ně bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in a$ a $D \in b$.

17. Je dána kružnice k a dva různé body P, Q. Sestrojte dvě rovnoběžky p, q procházející po řadě body P a Q tak, aby protínaly kružnici k v bodech X a Y, které omezují čtvrtkružnici.

18. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a kružnice k jemu opsaná. Na oblouku AB je zvolen bod X tak, že velikost úhlu AXB je $120°$. Dokažte, že $|CX| = |AX| + |BX|$.

19. Je dána úsečka AS délky a a další dvě úsečky délek b a c. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $|BS| = b$, $|CS| = c$.

§8: PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

Podobné zobrazení je zobrazení, které zachovává poměr délek úseček a velikosti úhlů mezi nimi. Zvláštním případem podobného zobrazení je *stejnolehlost* (homotetie), která je určena středem S a koeficientem $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$. Obrazem každého bodu $X \neq S$ v takové stejnolehlosti je bod X', který leží na přímce SX a splňuje rovnost $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$; přitom pro $\lambda > 0$ leží bod X' na polopřímce SX, pro $\lambda < 0$ na polopřímce opačné. Bod S je samodružný bod. Obrazem přímky p ve stejnolehlosti je přímka p' s ní rovnoběžná; obrazem kružnice $k(X,r)$ je kružnice $k'(X',r')$. Každé dvě kružnice s *různými* poloměry r_1, r_2

jsou stejnolehlé v právě dvou stejnolehlostech; v případě, kdy se tyto kružnice dotýkají v bodě T, má jedna z těchto stejnolehlostí střed T. Společná tečna dvou neshodných kružnic prochází jedním ze středů jejich stejnolehlosti.

1. Na kružnici k jsou pevně dány body A, B; bod C se pohybuje po této kružnici. Vyšetřete množinu těžišť všech takových trojúhelníků ABC.

2. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno
a) $v_a = 5$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$ b) α, β, t_c

3. Z daných úseček o délkách a, b, c, d, e sestrojte pomocí pravítka a kružítka deset úseček následujících délek:

a) $\sqrt{ab}$	b) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	c) ab/c
d) $a\sqrt{2}/(\sqrt{2} + \sqrt{3})$	e) $(abc)/(de)$	f) $a \cdot \sqrt[4]{2}$
g) $\sqrt{a^2 + ab + ac}$	h) $\sqrt[4]{abcd}$	i) $\sqrt[4]{a^3b + ab^3}$
j) $\sqrt{(a^3/b) + (c^3/d)}$		

4. Sestrojte $\triangle ABC$, znáte-li tři body X, Y, Z, které jsou souměrně sdruženy se středem S kružnice opsané $\triangle ABC$ po řadě podle přímek AB, BC, AC.

5. Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A tak, že $|SA| > r$. Sestrojte sečnu XY kružnice k tak, aby procházela bodem A, protínala kružnici k v bodech X a Y a aby platilo $|AX| = 3 \cdot |AY|$.

6. Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodě A. Veďte tímto bodem přímku, na které vytíná k_1 dvakrát delší tětivu než k_2.

7. Jsou dány tři různé body A, B, C a dvě různé rovnoběžky a, b, které procházejí po řadě body A a B. Sestrojte přímku p, která prochází bodem C tak, aby protínala přímku a v bodě X, přímku B v bodě Y a aby platilo $|AX| = 2 \cdot |BY|$.

8. Je dána kružnice k_1, přímka t a na ní bod T. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky t v bodě T a kružnice k_1.

9. Jsou dány dvě přímky a, b a bod M, který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici k procházející bodem M, která se dotýká obou přímek a i b.

10. Dokažte, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě V (tzv. *ortocentrum*), přitom bod V leží na přímce e, na níž leží i těžiště T tohoto trojúhelníka i střed S kružnice trojúhelníku opsané (tzv. *Eulerova přímka*). (Přesněji: bod T leží na úsečce SV a platí $|ST| : |TV| = 1 : 2$.)

11. Dokažte, že středy stran $\triangle ABC$, paty V_1, V_2, V_3 jeho výšek i středy X, Y, Z úseček, které spojují ortocentrum V tohoto trojúhelníka s jeho vrcholy, leží na jedné kružnici (tzv. *Feuerbachova kružnice*).

§9: PLANIMETRICKÉ VÝPOČTY

V následujícím přehledu základních vzorců značíme velikosti prvků trojúhelníka standardním způsobem. Pro stručnost uvádíme někdy jen jeden ze tří vzorců daného typu, ostatní lze snadno získat cyklickou záměnou vrcholů trojúhelníka.

• *Pravoúhlý trojúhelník* ($\gamma = 90°$):
(i) Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$
(ii) Euklidovy věty $v^2 = c_a \cdot c_b$, $a^2 = c_a \cdot c$, $b^2 = c_b \cdot c$
• *Obecný trojúhelník:*
(iii) Sinová věta (R je poloměr kružnice opsané)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

(iv) Kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(v) Vzorce pro obsah P trojúhelníka

$$P = \tfrac{1}{2}av_a = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{abc}{4R} = s\cdot\varrho = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ a ϱ je poloměr kružnice vepsané.
(vi) Vzorce pro výšky

$$v_a = b\sin\gamma = c\sin\beta = \frac{2P}{a}$$

(vii) Vzorce pro těžnice

$$t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$$

1. seminář

1. V pravoúhlém trojúhelníku platí $t_a = \sqrt{156}$ a $t_b = \sqrt{89}$. Určete přeponu c.

2. Úsečka CD délky 1 je těžnicí pravoúhlého $\triangle ABC$. Určete jeho obsah, víte-li, že $|\sphericalangle ACD| = 30°$ a $|\sphericalangle BCD| = 60°$.

3. V pravoúhlém $\triangle ABC$ jsou známy délky odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$. Určete vzdálenost vrcholu C do nejbližšího bodu kružnice vepsané $\triangle ABC$.

4. V pravoúhlém $\triangle ABC$ jsou sestrojeny těžnice AM a výška CD. Dokažte, že $\triangle BMD$ je rovnoramenný a s pomocí délek odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$ vyjádřete jeho obsah.

5. V rovnoramenném $\triangle ABC$ platí $|\sphericalangle BAC| = \alpha > 90°$. S pomocí α a délky $a = |BC|$ vyjádřete vzdálenost mezi ortocentrem a středem kružnice opsané.

6. Určete poloměr kružnice opsané danému rovnoramennému trojúhelníku o základně z a obsahu P.

7. V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $|AC| = 3$ a $|BC| = 4$ je sestrojena výška CD. Najděte vzdálenost mezi středy kružnic vepsaných $\triangle ADC$ a $\triangle BDC$.

8. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC je vybrán bod D tak, že CD je osa úhlu ACB. S pomocí délek odvěsen vyjádřete vzdálenost mezi ortocentry $\triangle ADC$ a $\triangle BDC$.

9. Dvě shodné kružnice o poloměru 1 mají vnější dotyk, leží uvnitř daného rovnoběžníka a každá z nich se dotýká tří jeho stran. Jeden z úseků strany rovnoběžníka od vrcholu do bodu dotyku s kružnicí má délku $\sqrt{3}$. Najděte obsah rovnoběžníka.

10. Určete délku příčky lichoběžníka procházející průsečíkem jeho úhlopříček rovnoběžně s jeho základnami, které mají dané velikosti a, b.

2. seminář

11. Odvoďte vzorce pro výšky trojúhelníka (vi) a z nich pak rovnost prvních třech výrazů ze sinové věty (iii); pro čtvrtý výraz užijte větu o obvodovém a středovém úhlu.

12. S pomocí kosinové věty odvoďte vzorce pro těžnice (vii).

13. Dokažte, že těžnice t_a, t_b v trojúhelníku o stranách a, b, c jsou navzájem kolmé, právě když $a^2 + b^2 = 5c^2$.

14. Osy vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C trojúhelníka ABC protínají přímku AB v bodech P a Q. Dokažte, že $|AP| : |BP| = |AQ| : : |BQ| = |AC| : |BC|$. Výsledek dále použijte k důkazu tvrzení: Jsou-li A, B různé body roviny π, pak pro každé $k > 0$, $k \neq 1$, je množina

$$M_k = \{X \in \pi; |AX| : |BX| = k\}$$

kružnice se středem na přímce AB. (Jde o tzv. *Apolloniovu kružnici*.)

15. Dokažte, že pro strany a, b a úhlopříčky e, f libovolného rovnoběžníka platí $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

16. Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice o poloměru R. Najděte poloměr ϱ kružnice vepsané trojúhelníku ACD.

17. Určete poloměr kružnice procházející vrcholy B, C a středem O kružnice vepsané trojúhelníku ABC, znáte-li $a = |BC|$ a $\alpha = |\sphericalangle CAB|$.

18. V rovnoramenném trojúhelníku ABC ($|AB| = |BC|$) je sestrojena těžnice AD. Určete $|\sphericalangle BDA|$, znáte-li úhel $\beta = |\sphericalangle ABC|$.

19. Kružnice o poloměru r prochází vrcholy A, B trojúhelníka ABC a protíná stranu BC v bodě D. Najděte poloměr R kružnice opsané trojúhelníku ACD, znáte-li r, $b = |AC|$ a $c = |AB|$.

20. V trojúhelníku ABC jsou na stranách AC, AB zvoleny po řadě body M, N tak, že M je střed AC a obsah trojúhelníka AMN je roven jedné třetině obsahu trojúhelníka ABC. Najděte délku úsečky MN, znáte-li $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$.

21. Najděte poloměr kružnice, která vytíná na obou ramenech daného úhlu o velikosti α dvě tětivy téže délky a, jestliže je známo, že vzdálenost mezi bližšími konci tětiv je rovna b.

22. Dokažte *Ptolemaiovu větu*: Pro každý tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí $|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|DA| = |AC|\cdot|BD|$. (Návod: Délky všech úseček vyjádřete pomocí poloměru R opsané kružnice a úhlů $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a $\omega = |\sphericalangle CAD|$, dále užijte vzorce pro goniometrické funkce.)

§10: STEREOMETRICKÉ VÝPOČTY

Následující definice a věty se týkají přímek a rovin v prostoru $\mathbf{E}_3$.

Přímky p, q jsou navzájem *kolmé*, jestliže existují takové přímky p', q', pro které platí $p' \| p$ a $q' \| q$, p' a q' jsou *kolmé různoběžky*.

Přímka p je *kolmá k rovině* α, je-li kolmá ke všem přímkám roviny α.

Kritérium kolmosti přímky a roviny: Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám roviny α, pak je kolmá k rovině α.

Rovina α je kolmá k rovině β, jestliže obsahuje přímku kolmou k rovině β. Je-li rovina α kolmá k rovině β, je i rovina β kolmá k rovině α.

Odchylku mimoběžných přímek p, q definujeme jako odchylku různoběžných přímek p', q', pro které platí $p' \| p$ a $q' \| q$.

Odchylku přímky p a roviny α klademe rovnu nule, je-li $p \| \alpha$; je-li $p \nparallel \alpha$, je tato odchylka rovna odchylce přímky p a přímky q, která je průsečnicí roviny α s rovinou β kolmou k rovině α procházející přímkou p (tzv. *kolmý průmět* přímky p do roviny α).

Odchylku různoběžných rovin α, β definujeme jako odchylku přímek a, b, kde $a \subseteq \alpha$, $b \subseteq \beta$ a obě přímky a, b jsou kolmé k průsečnici rovin α a β.

Některé vzorce pro objem a povrch těles

Pro objem V *jehlanu* (čtyřstěnu) platí

$$V = \frac{1}{3} P \cdot v,$$

kde P je obsah podstavy a v výška (vzdálenost vrcholu od podstavy). Pro objem V *komolého jehlanu* platí

$$V = \frac{v}{3}(P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2),$$

kde P_1, P_2 jsou obsahy podstav a v výška (vzdálenost rovin podstav). Pro objem V a povrch S *rotačního kužele* platí

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v, \qquad S = \pi r(r + s),$$

kde r je poloměr podstavy, v výška a $s = \sqrt{v^2 + r^2}$ je strana kužele. Pro objem V a povrch S *rotačního komolého kužele* platí

$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)v, \qquad S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)s),$$

kde r_1, r_2 jsou poloměry podstav, v výška a s strana komolého kužele. Pro objem V a povrch S *válce* platí

$$V = \pi r^2 v, \qquad S = 2\pi r(r + v),$$

kde r je poloměr podstavy, v výška válce. Pro objem V a povrch S *koule* o poloměru r platí

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad S = 4\pi r^2.$$

Pro objem V *kulové úseče* o poloměru podstavy ϱ a výšce v platí

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho^2 + v^2).$$

Pro objem V *kulové vrstvy* o poloměrech podstav ϱ_1, ϱ_2 a výšce v platí

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2).$$

Pro objem V *kulové výseče* platí

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v,$$

kde r je poloměr příslušné koule a v výška příslušné kulové úseče.
Pro povrch S *kulového vrchlíku* platí

$$S = 2\pi rv,$$

kde r je poloměr příslušné kulové plochy a v výška kulového vrchlíku.
Pro povrch S *pásu kulové plochy* platí

$$S = 2\pi rv,$$

kde r je poloměr příslušné kulové plochy a v výška kulové plochy.

1. seminář

1. V pravidelném čtyřstěnu určete:
a) odchylku boční hrany od roviny podstavy,
b) odchylku boční stěny od roviny podstavy.

2. V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ o podstavné hraně délky a a boční hraně b je dán střed M strany BC. Určete odchylku přímek AC a VM.

3. Rovina $\alpha = ACH$ vytíná z krychle $ABCDEFGH$ čtyřstěn, jehož povrch je S. Vypočtěte povrch krychle.

4. Dokažte,že pro objem V čtyřstěnu $ABCD$ platí:

$$V = \frac{1}{6}|AB| \cdot |AC| \cdot |AD| \cdot \sin\beta \sin\gamma \sin\varphi,$$

kde $\beta = |\sphericalangle DAB|$, $\gamma = |\sphericalangle DAC|$ a φ je odchylka rovin ADB a ADC.

5. V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ o hraně a je vrcholem D vedena rovina α kolmo k rovině ABC rovnoběžná s přímkou AB, která čtyřstěn rozdělí na dvě tělesa.
Vypočtěte obsah řezu roviny α čtyřstěnem $ABCD$.
Vypočtěte poměr objemů takto vzniklých těles.

6. Hrana podstavy pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$ má délku a, odchylka bočních stěn ABV a ACV je α. Vypočtěte obsah pláště Q jehlanu $ABCV$.

7. V trojbokém jehlanu mají dvě protilehlé hrany délku a, b, délka ostatních hran je c. Vypočtěte objem a povrch tohoto jehlanu.

8. Hrana podstavy pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$ má délku a, boční hrana délku b. Vypočtěte objem jehlanu a obsah řezu rovinou, která prochází podstavnou hranou AB kolmo k hraně CV.

9. Užitím vzorce pro objem jehlanu odvoďte vzorec pro objem komolého jehlanu.

10. Délky hran podstav pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu jsou a, b $(a > b)$; velikost ostrého úhlu mezi hranami boční stěny je φ. Dokažte, že pro jeho objem V platí

$$V = \frac{a^3 - b^3}{6\cos\varphi} \cdot \sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

2. seminář

11. Kouli K jsou
a) vepsány b) opsány
rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Vypočtěte poměr objemů a povrchů těchto tří těles.

12. Dva rotační kužele K_1, K_2, které mají shodné tělesové výšky v a jejichž poloměry podstav jsou po řadě r_1, r_2, jsou do sebe zasazeny tak, že vrchol každého kužele je ve středu podstavy druhého. Určete objem společné části obou kuželů.

13. Rozvinutý plášť kužele má tvar kruhové výseče se středovým úhlem o velikosti α (v obloukové míře) a délkou tětivy b. Dokažte, že objem kužele lze vyjádřit ve tvaru

$$V = \frac{\alpha^2 b^3 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{192\pi^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

14. Vypočtěte objem a povrch komolého kužele, jehož podstavy jsou kruhy, z nichž jeden je opsaný a druhý vepsaný protilehlým stěnám krychle o hraně délky a.

15. Do rotačního komolého kužele s poloměry podstav r_1, r_2 je vepsána koule, která se dotýká obou podstav a pláště kužele. Určete povrch a objem tohoto kužele.

16. V komolém rotačním kuželi jsou úhlopříčky osového řezu navzájem kolmé, odchylka strany s kužele od roviny dolní podstavy je α. Určete objem tohoto kužele.

17. Úhel při hlavním vrcholu osového řezu rotačního kužele je roven 2α, součet délek jeho výšky a strany je roven m. Určete objem a povrch kužele.

18. Určete, jakou část povrchu Země uvidí kosmonaut z paluby rakety z výšky $h = R_Z$ nad povrchem Země (R_Z značí poloměr Země).

19. Kulovou plochu rozděluje rovina β na dva vrchlíky, jejichž povrchy jsou S_1 a S_2. Vypočítejte obsah řezu roviny touto kulovou plochou.

20. Nad výškou rotačního kužele jako nad průměrem je opsána koule. Určete objem části koule uzavřené uvnitř kužele, jestliže je dána výška h kužele a úhel při vrcholu osového řezu kužele je 2α.

VÝSLEDKY

§1: Racionální funkce, rovnice a nerovnice

1.
a) $(x-1)(x+3)(x+7)$
b) $(x+2)(x-3)(x-5)$
c) $(x-1)(x+2)(x^2+x+6)$
d) $x(x+5)(x^2+5x+10)$ [substituce $y = x^2+5x$]
e) $(x-3)(3x+2)^2$

2.
a) $x_1 = 2$, $x_2 = 2a$ ($x_1 = x_2$ pro $a = 1$)
b) $x = -1/2$ pro $a = 0$, $x_1 = x_2 = -1$ pro $a = 1$, $x \in \emptyset$ pro $a \in (1, \infty)$,
$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ pro $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
c) $x_1 = -2a$, $x_2 = 3a$ pro $a \neq 0$, $x \in \emptyset$ pro $a = 0$
d) $x_1 = a + b \neq x_2 = \dfrac{2ab}{a+b}$ pro $a \neq \pm b$, $x = 0$ pro $a = -b$,
$x = 2a$ pro $a = b$

3.
Dva různé kořeny pro $a \in (-\infty, -2) \cup (1/2, 3) \cup (3, \infty)$, oba kladné pro $a \in (-\infty, -2) \cup (1/2, 6/7) \cup (3, \infty)$, jeden kladný a druhý záporný pro $a \in (6/7, 3)$, jeden nulový a druhý kladný pro $a = 6/7$.

4.
a) $40/9$
b) $-224/27$
c) -2
d) $\pm 4/3$
e) $-32/9$
f) $\pm 32/9$

5.
Například $x^2 + 8x + 1 = 0$. [$x = \sqrt{15} - 4$, takže $(x+4)^2 = 15$]

6.
$a = 4$

7.
$k = 3$ [diskriminant $D = 16(k-2)$]

8.
a) $a = -3/4$, $a = 0$, $a = 2/9$
b) $a = -6$

9.
a) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
b) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

c) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$
d) $x = -1$
e) $x_1 = -2/3$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2$
10.
a) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (4, \infty)$
b) $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 5)$
c) $x \in (2/3, 2) \cup (2, \infty)$
d) $x \in (-1, 5)$ [čitatel je kladný]
e) $x \in (-2, 0) \cup (6, \infty)$
f) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1/2) \cup (1, \infty)$
g) $x \in (-\infty, -2) \cup \langle -5/4, -1) \cup (1, 5\rangle$
h) $x \in (-2, \infty)$
i) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
j) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup (-1, 0) \cup (0, 1\rangle \cup (3, \infty)$
k) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
l) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$
m) $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (1, 3)$
n) $x \in (-1/5, 2/3) \cup (2/3, 5)$
o) $x \in \langle 2, 5\rangle$
p) $x \in \langle 1/2, 2\rangle$
q) $x \in (-\infty, -2/3\rangle \cup \langle 1/2, 2\rangle$
r) $x \in (-7, -2) \cup (3, 4)$
s) $x \in (0, \infty)$
t) $x \in \langle 1/3, 3\rangle$
11.
a) $a \in (-\infty, -6)$ [$a = -4$ nevyhovuje, takže $a + 4 < 0$ a $D < 0$]
b) $a \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, \infty)$ [buď $a = 1$, nebo $a^2 - 1 > 0$ a $D < 0$]
c) $a \in (5/3, \infty)$ [$a = 1$ nevyhovuje, takže $a - 1 > 0$ a $D < 0$]
d) $a \in (1, \infty)$ [Nemůže být ani $a < 0$, ani $a = 0$; pro $a > 0$ má vrchol příslušné paraboly kladnou x-ovou souřadnici $x_0 = 2/a$, takže zjistíme, kdy i jeho y-ová souřadnice je kladná.]
e) $a \in (0, 1/3)$ [Zjistíme, kdy daný trojčlen má zápornou hodnotu jak pro $x = 1$, tak pro $x = 3$, právě tehdy leží příslušná parabola pod osou x v celém intervalu $A = \langle 1, 3\rangle$.]
12.
$b \in (-2, 4)$ [Jmenovatel je kladný pro každé $x \in \mathbf{R}$.]
13.
$a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$ [Číslo a leží mezi kořeny dané rovnice $F(x) = 0$, právě když $F(a) < 0$ (tato nerovnost zaručuje i existenci kořenů).]
14.
$a \in (2, 5)$ [V případě $a - 2 > 0$ zjistíme, kdy pro trojčlen $F(x)$ z dané rovnice platí $F(2) < 0$ a $F(3) < 0$; v případě $a - 2 < 0$ kdy $F(2) > 0$ a $F(3) > 0$.]

§2: Iracionální rovnice a nerovnice

1.

a) $x = 9$
b) $x = -3/2$, $x = 1/2$
c) $x = 3$
d) $x = 3$
e) $x = 4$
f) $x = 1 + \sqrt{3}$, $x = 1 - \sqrt{3}$
g) $x = 10$
h) $x = 5$
i) $x = 8$
j) $x = 4$
k) $x = 1$
l) $x = -1$, $x = 9/16$

2.

a) $x \in \langle 1, 2) \cup (2, \infty)$
b) $x \in \langle -18, -2)$
c) $x \in (-\infty, 1/2\rangle$
d) $x \in \langle -78, 3)$
e) $x \in \langle 0, 2\rangle$
f) $x \in \langle -2, -8/5) \cup (0, 2\rangle$
g) $x \in \langle -1, 0) \cup (3/5, 1\rangle$
h) $x \in (-\infty, \infty)$
i) $x \in (-\infty, -3\rangle$
j) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, 8/3)$
k) $x \in (3, 5\rangle$
l) $x \in (1, \infty)$
m) $x \in \langle 1, 3/2)$
n) $x \in \langle -20, 0) \cup (5, \infty)$

§3: Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

1.

a) $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y \Rightarrow$ vzorec
b) $a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a x} / a^{\log_a y} = x/y \Rightarrow$ vzorec
c) $a^{y \cdot \log_a x} = a^{(\log_a x)\cdot y} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y \Rightarrow$ vzorec
d) $a^{-\log_a x} = a^{0 - \log_a x} = a^0 / a^{\log_a x} = 1/x \Rightarrow$ vzorec
e) $x = a^{\log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = b^{\log_b a \cdot \log_a x} \Rightarrow$ vzorec
f) Položte $x = b$ v e).
g) $b^{\log_a c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a c} = a^{\log_a b \cdot \log_a c} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_a b} = c^{\log_a b}$

2.

a) $m = 49/5$
b) $m = -1$
c) $m = 625$
d) $m = 0$
e) $m = 20$
f) $m = -\log_3 2$
g) $m = 24$

3.

a) $x = \dfrac{a+3}{2(a+1)}$
b) $x = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$
c) $x = -(2a+b+2c)$
d) $x = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$

4.

$V = \log_a b$

5.

a) $a^2 + b^2 = 7ab$ upravte na $(a+b)^2 = 9ab$ a pak logaritmujte.
b) $a^2 + 9b^2 = 10ab$ upravte na $(a+3b)^2 = 16ab$ a pak logaritmujte.

6.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2 \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$
b) $x = 2$
c) $x = \dfrac{\log 13 - \log 31}{\log 5 - \log 3}$
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$
e) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$
f) $x = 3$
g) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ [Uvažte, že $(2-\sqrt{3})^{-1} = 2+\sqrt{3}$.]
h) $x = 1/2$ [Po vydělení 81^x položte $y = (4/9)^x$.]
i) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ [Po vydělení 4^x položte $y = (3/2)^x$.]
j) $x = 1$ [Levá strana je klesající v x, pravá strana je rostoucí.]
k) $x = 0$ [Zvolte substituci $y = (3/2)^x$, nebo uvažte, že po vydělení mocninou 9^x bude levá strana klesající a pravá konstantní.]

7.

a) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
c) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 10$
d) $x = 41$
e) $x = 10$ [Uvažte monotonii každé ze stran rovnice na intervalu $(0, 20)$.]
f) $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

g) $x = 4$

h) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $x_1 = 1/10$, $x_2 = 1\,000$

j) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 9$

k) $x_1 = 1/16$, $x_2 = 2$

l) $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/15$ [Zlogaritmujte obě strany rovnice při základu 5 a zvolte substituci $y = \log_5 x$.]

m) $x_1 = 7$, $x_2 = 14$ [Zlogaritmujte obě strany rovnice při základu 2 a zvolte substituci $y = \log_2 x$.]

n) $x \in \emptyset$

o) $x_1 = 1$, $x_2 = a$

8.

a) $x \in (0, 2 - \log_2 3) \cup (1, \infty)$

b) $x \in (-\infty, -2) \cup (2 - \log_2 3, \infty)$

c) $x \in (-1, 1\rangle$

d) $x \in (0, \infty)$

e) $x \in (0, \infty)$

f) $x \in (-\infty, 0)$ [Po vydělení 27^x položte $y = (2/3)^x$.]

g) $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$

h) $x \in (0, 2) \cup (3, \infty)$

i) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

j) $x \in (5/2, \infty)$

k) $x \in (1, 2)$

l) $x \in (1, 3)$

m) $x \in (0, 1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

n) $x \in (1, 4)$

o) $1 < x < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

p) $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

q) $x \in (-\infty, 0) \cup (3/4, 1) \cup (1, 5/4) \cup (2, \infty)$

r) $x \in (1, \infty)$

s) $x \in (2, 3) \cup (27/8, 4)$

t) $x \in (-\infty, 1)$

u) $x \in (0, 1/2) \cup (2, \infty)$

v) $x \in (3, \infty)$ [Využijte monotonie každé z obou stran.]

w) $x \in (-\infty, -1)$

x) $x \in (1, a)$

y) $x \in \big(0, a^2\big) \cup \big(1, a^{-3}\big)$

§4: Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

2.

a) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})/4$ $[\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)]$

b) $2+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}$ [Využijte: $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(20^\circ + 40^\circ)$]

d) 0

e) 0 [Využijte třikrát: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$]

3.

a) $\sqrt{5}/5$

b) $4/3$

c) $-4/5$

d) $125/78$

e) $(5-12\sqrt{3})/26$

f) $65/113$

4.

a) -1

b) $\operatorname{tg}\alpha$

c) $\operatorname{tg} 5\alpha$

d) $1/4$

e) 0

5.

Obecně lze postupovat takto: dosadíme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ do obou stran a dokážeme vzniklou identitu v nezávislých proměnných α, β.

6.

V zápisech kořenů značí k libovolné celé číslo.

a) $k\pi,\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$

b) $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi$

c) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}$

d) $\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$

e) $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

f) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$ [Užijte vzorec pro rozdíl hodnot sinu.]

g) $2\pi,\ \dfrac{5\pi}{2}$

h) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$

i) $2k\pi$ [Uvažte, že $L \le 1$.]

j) $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ [Upravte na rovnici $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.]

k) $2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

l) $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ [K oběma stranám přičtěte $2\sin^2 x\cos^2 x$ a užijte substituci $y=\sin 2x$.]

m) $\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$ [Užijte vzorec pro součet hodnot sinu.]

n) $\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi$ $[\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))]$

o) $\dfrac{k\pi}{4}$ [Užijte vzorce pro součin hodnot sinu a rozdíl hodnot kosinu.]

p) $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}$

q) $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ [Přepište $\cos 3x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$ a užijte vzorec pro součet hodnot sinu.]

r) $\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ \dfrac{11\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}$ [Pravá strana je $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, dále užijte vzorec pro rozdíl hodnot kosinu.]

s) $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}$ [Odvoďte $\sin 2x=\pm\cos 3x$ a dále postupujte jako v q).]

t) $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k\pi}{7}$

u) $k\pi,\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$

v) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$ [Uvažte, že $\mathrm{tg}(3x+x)$ nemá smysl.]

w) $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi$

x) $2k\pi,\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$ [Upravte do tvaru $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.]

y) $2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$

z) $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ [Užijte substituci $y=\sin x+\cos x$, pak $y^2=1+\sin 2x$].

7.

Obor pravdivosti je sjednocením uvedených intervalů, k značí libovolné celé číslo.

a) $\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$

b) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle$

c) $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

d) $\left(-\pi,-\dfrac{3\pi}{4}\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{4},0\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

e) $\left\langle \frac{2\pi}{3}, \pi \right\rangle$, $\left\langle \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$

f) $\left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$

g) $\left(-\pi, -\frac{3\pi}{4} \right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$

h) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right)$

i) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$, $\left(\pi, \frac{4\pi}{3} \right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$

j) $(1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k} \right)$ pro $k \neq 0$

k) $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right)$

l) $\left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

m) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right)$, $\left(\pi, \frac{7\pi}{6} \right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right)$

n) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6} \right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4} \right)$

§5: Komplexní čísla

1.

$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) =$

$= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) = (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$,

$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] =$

$= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) = (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$.

2.

a) $-1+3\mathrm{i}$

b) $1-\mathrm{i}$

c) -1

d) $-48\mathrm{i}/25$

e) 0

f) $1+\mathrm{i}\sqrt{1-a}$

3.

a) $a=1$, $b=2$

b) $a=2$, $b=-3$

4.

a) 0

b) $13/10$

c) 5^{99}

d) 2 ($z_1 \neq 0$ nebo $z_2 \neq 0$)

5.

a) $\pm(2+3\mathrm{i})$ $\quad [\sqrt{-5+12\mathrm{i}} = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow -5 = x^2 - y^2 \wedge 12 = 2xy]$

b) $\pm(2-\mathrm{i})$

c) $\pm(1/2+2\mathrm{i})$

6.

a) $z_1 = 1+2\mathrm{i}$, $z_2 = 1-2\mathrm{i}$

b) $z_1 = 2+\mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$

c) $z_1 = (3-5\mathrm{i})/2$, $z_2 = (-1-\mathrm{i})/2$

d) $z_1 = 2+3\mathrm{i}$, $z_2 = 1+2\mathrm{i}$

e) $z = 3/2 - 2\mathrm{i}$

f) $z = 3/4 + \mathrm{i}$

g) $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm 1$, $z_{4,5} = \pm\mathrm{i}$

h) $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm\mathrm{i}$

7.

a) $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$

b) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

c) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

8.

a) $16(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$

b) $2^{12}(1+\mathrm{i})$

c) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})/4$

d) $2\mathrm{i}^{n-1}$

e) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$

9.

$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \dots$

$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \dots$

10.

Podmínku upravte na ekvivalentní rovnici $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$, jež má kořeny $z_{1,2} = \cos(\pm\alpha) + \mathrm{i}\sin(\pm\alpha)$. Rovnosti $z_k^n + \dfrac{1}{z_k^n} = 2\cos n\alpha$ pro $k \in \{1,2\}$ pak odvodíte z Moivreovy věty.

11.

$$\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha} = \frac{\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha}{\cos n\alpha - \mathrm{i}\sin n\alpha} = \frac{\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha}{\cos(-n\alpha) + \mathrm{i}\sin(-n\alpha)} =$$
$$= \cos 2n\alpha + \mathrm{i}\sin 2n\alpha,$$

odtud speciálně pro $n = 1$: $\quad \dfrac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha.$

12.

a) $\pm 2\mathrm{i}$

b) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$, $-\mathrm{i}$

c) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(8k+3)\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{(8k+3)\pi}{16}\right)$, $k\in\{0,1,2,3\}$

d) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{(6k-5)\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{(6k-5)\pi}{15}\right)$, $k\in\{1,2,3,4,5\}$

13.

Označte levé strany $S_n(\alpha,\varphi)$, $C_n(\alpha,\varphi)$ a uvažujte komplexní jednotky $\varepsilon=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, $\delta=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$. Pak v případě $\varepsilon\neq 1$ platí

$$C_n(\varphi)+\mathrm{i}S_n(\varphi)=\delta(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^n)=\frac{\delta(1-\varepsilon^{n+1})}{1-\varepsilon}=$$

$$=\frac{\delta\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{n+1}{2}}-\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{\delta\varepsilon^{\frac{n}{2}}\left(-2\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left[\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)\right]\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Odtud porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme kýžené vzorce. V případě $\varepsilon=1$ platí $C_n(\alpha,\varphi)+\mathrm{i}S_n(\alpha,\varphi)=(n+1)\delta$, odkud plyne $C_n(\alpha,\varphi)=(n+1)\cos\varphi$ a $S_n(\alpha,\varphi)=(n+1)\sin\varphi$.

14.

Hledané obory popíšeme v kartézských souřadnicích x,y ($z=x+\mathrm{i}y$).

a) Přímka $y=0$.

b) Polorovina $x>0$.

c) Kružnice se středem $[0,0]$ a poloměrem 4.

d) Kruh se středem $[0,1]$ a poloměrem 1.

e) Úhel v prvním kvadrantu s rameny $y=x/\sqrt{3}$ a $y=x$.

f) Doplněk kruhu se středem $[-2,1]$ a poloměrem 2.

g) Osa úsečky s krajními body $[1,0]$ a $[3,0]$, tedy přímka $x=2$.

h) Osa úsečky s krajními body $[0,-1]$ a $[0,1]$, tedy přímka $y=0$.

i) Elipsa s ohnisky $[-1,0]$, $[1,0]$.

j) Parabola s ohniskem $[-2,0]$, vrcholem $[-1,0]$ a řídící přímkou $x=0$.

k) Apolloniova kružnice bodů X, pro něž $|XA|=2|XB|$, kde $A[0,-2]$ a $B[0,-1]$ (viz §9, úloha 14).

l) Dvojice přímek $y=\pm x$.

m) Hyperbola s ohnisky $[1,0]$ a $[-1,0]$.

n) Vnitřek mezikruží se středem $[0,-1/3]$ a poloměry $1/3$ a 1.

o) Osa úsečky s krajními body $[2, 0]$ a $[-3, 0]$, tedy přímka $x = -1/2$.
p) Kružnice se středem $[1/2, 0]$ a poloměrem $1/2$ kromě bodu $[0, 0]$.
q) Přímka $2x - y = 1$.
r) Polopřímka $y = 0 \wedge x \leq 0$.

§6: Základy planimetrie

1.
Body A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, její střed tedy určíme jako průsečík přímky p s osou úsečky A_0B_0.
2.
Protože úhly MCS_2 a MKN jsou pravé, platí $CS_2 \parallel NK$, střídavé úhly KNC, NCS_2 jsou tedy shodné, stejně jako úhly NCS_2 a S_2NC, neboť ΔS_2NC je rovnoramenný.
3.
Označme T průsečík přímky AB s tečnou t ke kružnici k jdoucí bodem N. (Pokud T neexistuje, tj. $AB \parallel t$, je tvrzení úlohy zřejmé.) Z rovnosti $|TC| = |TN|$ plyne $|\sphericalangle TCN| = |\sphericalangle TNC|$, takže $|\sphericalangle CAN| + |\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle TNB| + |\sphericalangle BNC|$. Ale $|\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle TNB|$ (obvodový a úsekový úhel), proto i $|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle BNC|$.
4.
Je-li $AB \parallel t$, určíme bod dotyku $T \in k \cap t$ jako průsečík přímky t s osou úsečky AB; v opačném případě pro bod T a bod $V \in t \cap AB$ platí $|VT|^2 = |VA| \cdot |VB|$. Vzdálenost $|VT|$ sestrojíme podle Euklidovy věty o výšce.
5.
Platí $|\sphericalangle CAT| = |\sphericalangle CTX|$ a $|\sphericalangle DBT| = |\sphericalangle DTY|$, kde X a Y jsou body na společné tečně jdoucí bodem T. Protože úhly CTX a DTY jsou vrcholové, plyne odtud shodnost střídavých úhlů CAT a DBT, tudíž $AC \parallel BD$.
6.
Kružnice sestrojená nad průměrem CS, kde $C \in k$, $CS \perp AB$. [Je-li $X \in \{A, B, C\}$, je $Y \in \{C, S\}$, v ostatních případech pro patu Z kolmice spuštěné z X na AB platí $\Delta CSY \simeq \Delta SXZ$ podle věty *sus*, odkud $|\sphericalangle CYS| = 90°$. Splňuje-li naopak některý bod Y poslední rovnost, určíme $X \in \leftrightarrow SY \cap k$; podle věty *usu* pak platí $\Delta CSY \simeq \Delta SXZ$, tudíž $|SY| = |XZ|$.]
7.
Úsečka A_0B_0 s výjimkou svého středu C, kde A_0, B_0 jsou kolmé průměty bodů A, B na tečnu q polokružnice k rovnoběžnou s AB. [Zřejmě $X \neq C$. Označme $T \in k \cap p$, a Y kolmý průmět bodu X na AB. Výšky XY a ST rovnoramenného trojúhelníku MSX jsou shodné, tudíž bod X má od AB vzdálenost rovnou poloměru poloružnice k, neboli $X \in q$. Je-li

naopak bod X libovolný bod přímky q různý od C, určíme bod M jako průsečík osy úsečky SX s přímkou AB; takový průsečík neleží na úsečce AB, právě když $X \in A_0B_0$. Z rovnoramenného trojúhelníku MSX plyne, že polopřímka MX je tečnou k.]

8.

V ΔCDS je to polokružnice k_1 nad průměrem KL (kde K, L jsou středy úseček CS, DS), v ΔABS, ΔBCS, ΔDAS další tři analogické polokružnice. [Nechť $X \in \Delta CDS$, pak i $Y \in \Delta CDS$ a posuzovaná vzdálenost od obvodu $ABCD$ je rovna $|YU|$, kde U je kolmý průmět Y na CD. Splývá-li bod X se středem Z úsečky CD, vyhovuje $Y = Z$. V ostatních případech z rovnosti $|XY| = |YU|$ a věty *sus* plyne $\Delta ZUY \simeq \Delta ZXY$, neboť úhly SZY, UYZ jsou shodné ($SZ \parallel YU$) a úhly SZY, SYZ rovněž tak ($|SY| = |SZ|$). Proto je pravý nejen úhel YUZ, ale i YXZ, tedy i SXZ a X leží na Thaletově kružnici nad průměrem SZ, z níž v ΔCDS leží právě polokružnice k_1. Obráceně, pokud je $X \in k_1 - \{Z\}$, zvolíme za Y průsečík $k \cap \mapsto SX$ a shodnost $\Delta ZUY \simeq \Delta ZXY$ odvodíme z věty *Ssu*; odtud už plyne $|XY| = |YU|$.]

9.

Označme O střed kružnice vepsané. Máme ukázat, že bod P leží na Thaletově kružnici nad průměrem CO, na níž leží bod N, tedy že body C, O, P, N leží na jedné kružnici. Zjistíme to vyjádřením velikostí úhlů COP a CNP, přitom rozlišíme, zda P leží uvnitř či vně ΔABC.

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Pomocí vnitřních úhlů v ΔBCO zjistíme, že $|\sphericalangle BOC| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, tedy $|\sphericalangle COP| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Úhel ONP je buď úhel ONM, nebo úhel k němu vedlejší. V prvním případě platí $|\sphericalangle CNP| = |\sphericalangle ONP| + 90^\circ = |\sphericalangle ONM| + 90^\circ$, ve druhém naopak $|\sphericalangle CNP| = |\sphericalangle ONP| - 90^\circ = 90^\circ - |\sphericalangle ONM|$. Z tětivového čtyřúhelníku $AMON$ máme $|\sphericalangle ONM| = \frac{1}{2}\alpha$.

§7: Shodná zobrazení

1.

Hledaná přímka prochází bodem $k_1' \cap k_2$, kde k_1' je obraz k_1 ve středové souměrnosti podle středu A.

2.

a) Umístíme těžnici AA_0 délky t_a a označíme D obraz bodu A v souměrnosti podle středu A_0. Těžiště T trojúhelníku ABC je známý bod úsečky AA_0. Bod B pak leží jednak na kružnici se středem T a poloměrem $\frac{2}{3}t_b$, jednak na oblouku, ze kterého je úsečka A_0D vidět pod úhlem γ, neboť úhel A_0BD je obrazem úhlu A_0CA ve zmíněné středové souměrnosti.

b) Nechť A_0, D mají stejný význam jako v a) a nechť X, Y značí paty kolmic z bodů A, resp. D na přímky BD, resp. AB. Umístíme-li úsečku AD délky $2t_a$ se středem A_0, pak podle věty *Ssu* můžeme sestrojit oba trojúhelníky AXD, AYD, pak sestrojit bod $B \in \leftrightarrow AY \cap \leftrightarrow DX$ a konečně bod C souměrně sdružený s B podle středu A_0.

c) Nechť A_0, D, Y mají stejný význam jako v b). Stejně jako tam sestrojíme nejdříve ΔADY, bod B pak určíme jako průsečík přímky AY s obloukem z části a), ze kterého je úsečka A_0D vidět pod úhlem γ.

3.

Doplňme ΔABC na rovnoběžník $ABCD$. Střed C_0 strany AB a bod D leží na polopřímce CT tak, že $|CC_0| = \frac{3}{2}|CT|$ a $|CD| = 2|CC_0|$. Body A, B určíme jako průsečíky ramen CX, CY s přímkami, které jsou s těmito rameny rovnoběžné a procházejí sestrojeným bodem D.

4.

Označme Q' obraz Q v souměrnosti podle středu S, v níž jsou sdružené body X a Y, takže $QY \parallel Q'X$. Protože k je Thaletova kružnice nad průměrem PQ, platí $PZ \perp QZ$, neboli $PX \perp QY$, což znamená, že rovněž $PX \perp Q'X$. Bod X tedy určíme jako průsečík tětivy AB s Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem PQ', zbytek konstrukce je jasný.

5.

Zvolme libovolně $A' \in t_1$, uvažujme posunutí $\mathcal{T}$ o vektor $\overrightarrow{AA'}$ a označme $B' = \mathcal{T}(B)$ a $C' = \mathcal{T}(C)$. Platí $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$, navíc z $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ plyne $B' \in t_2$ a $C \in t_3$, kde $t_3 \parallel t_1$ a $C' \in t_3$. Odtud plyne konstrukce: $B' \in t_2 \cap k_1(A', a)$, $C' \in k_1(A', a) \cap k_2(B', a)$, dále $t_3 \parallel t_1$, $C' \in t_3$ a $C \in t_3 \cap k$, konečně body A, B jsou obrazy bodů A', B' v posunutí $\mathcal{T}^{-1}$ o vektor $\overrightarrow{C'C}$.

6.

Označme A', B' obrazy bodů A, B v posunutí $\mathcal{T}$ o vektor $\overrightarrow{DC}$. Protože $BB'CD$ je rovnoběžník, platí $|\sphericalangle ACB'| = \varphi$ a $|CB'| = f$. Sestrojíme proto nejdříve $\Delta ACB'$ podle věty *sus*. Protože $AB \parallel A'B'$ a $AD \parallel A'C$, platí $|\sphericalangle B'A'C| = \alpha$ a navíc $|AA'| = |DC| = c$, takže bod A' leží jednak na kružnici $k(A, c)$, jednak na oblouku, ze kterého je úsečka $B'C$ vidět pod úhlem α. Konečně body B, D určíme jako obrazy bodů B', C v posunutí $\mathcal{T}^{-1}$ o vektor $\overrightarrow{A'A}$.

7.

Označme S_1, S_2 středy kružnic k_1, k_2 a O_1, O_2 středy úseček XA, YA. Uvažujme posunutí $\mathcal{T}$ o vektor $\overrightarrow{O_2S_2}$ kolmý k p. Bod $Z = \mathcal{T}(O_1)$ leží na kolmici k přímce p jdoucí bodem O_1, tedy na přímce S_1O_1. Protože $|O_1O_2| = \frac{1}{2}a$, platí rovněž $|ZS_2| = \frac{1}{2}a$, navíc $ZS_2 \parallel O_1O_2 \perp S_1O_1$, takže $ZS_2 \perp ZS_1$. Proto můžeme podle věty *Ssu* sestrojit ΔS_1S_2Z a poté vést bodem A přímku p rovnoběžně s S_2Z.

8.

(i) Označme O_1, O_2 kolmé průměty středů S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 na přímku p. Krajní body shodných tětiv hledané přímky q lze označit

$A_1, B_1 \in k_1$ a $A_2, B_2 \in k_2$ tak, aby při posunutí $\mathcal{T}$ o vektor $\overrightarrow{O_1O_2}$ platilo $A_2 = \mathcal{T}(A_1)$ a $B_2 = \mathcal{T}(B_1)$ (uvažte, že střed tětivy A_1B_1 se zobrazí do středu tětivy A_2B_2). Body A_2, B_2 tedy určíme jako průsečíky kružnice k_2 s kružnicí $k_1' = \mathcal{T}(k_1)$.

(ii) Platí $\overrightarrow{XY} = \boldsymbol{a}$ nebo $\overrightarrow{XY} = -\boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a}$ je jeden ze dvou vektorů velikosti a ležících na přímce p. Bod Y tedy najdeme jako průsečík kružnice k_2 s kružnicí k_1^+ nebo kružnicí k_1^-, jež jsou obrazy kružnice k_1 při posunutí o vektor $\boldsymbol{a}$ resp. $-\boldsymbol{a}$. Vedeme-li každým takovým průsečíkem přímku q rovnoběžně s přímkou p, dostaneme řešení úlohy.

9.

Označme body X, Y tak, aby ležely s body A, B na přímce v pořadí A, X, Y, B. Potom známe (volný) vektor $\overrightarrow{XY}$ a můžeme sestrojit bod $P' = P + \overrightarrow{XY}$. Protože $PZ \perp QZ$ (Thaletova kružnice) a $PX \parallel P'Y$ (úsečka a její obraz v posunutí), platí rovněž $P'Y \perp YQ$, takže bod Y určíme jako průsečík tětivy AB s Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem $P'Q$.

10.

Platí $|AX| + |XB| = |A'X| + |XB| \geq |A'B|$, kde A' je obraz A v souměrnosti s osou p. Uvedená nerovnost přejde v rovnost, právě když bod X leží na úsečce $A'B$.

11.

Označme B' obraz bodu B v souměrnosti podle osy o která prochází bodem C rovnoběžně s přímkou AB. Protože $|AB| = c$, $|BB'| = 2v_c$ a úhel ABB' je pravý, můžeme podle věty *sus* sestrojit $\Delta ABB'$ a pak osu o jeho strany BB'. Z rovností $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ a $|\sphericalangle BCB'| = 2\beta$ plyne $|\sphericalangle ACB'| = \gamma + 2\beta = (180° - \alpha - \beta) + 2\beta = 180° - (\alpha - \beta)$. Zbylý vrchol C proto určíme jako průsečík přímky o s obloukem, ze kterého je úsečka AB' vidět pod známým úhlem $180° - (\alpha - \beta)$.

12.

Rozlište případy, kdy posuzované úhly AXM a BXN mají za ramena XM a XN (i) dvě navzájem opačné polopřímky, (ii) dvě shodné polopřímky.

(i) Nechť B' je obraz bodu B v osové souměrnosti s osou $o = \leftrightarrow MN$. Označme Y libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k XA a sestrojme kružnici k se středem B', která se dotýká přímky o. Protože $|\sphericalangle B'XN| = |\sphericalangle BXN| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AXM|$, leží bod B' na ose úhlu NXY, který je vrcholový k úhlu AXM, takže kružnice k je do tohoto úhlu vepsaná a přímku AY můžeme sestrojit jako tečnu ke kružnici k vedenou bodem A. Bod X je pak průsečíkem této tečny s přímkou o.

(ii) V tomto případě leží bod B na ose úhlu AXM nebo na ose vedlejšího úhlu k úhlu AXM. Sestrojíme proto kružnici k se středem B, která se dotýká přímky MN; přímku AX pak určíme jako tečnu kružnice k

vedenou bodem A. Bod X je opět průsečíkem této tečny s přímkou MN.

13.

Osa o úsečky AT prochází bodem X. V souměrnosti s osou o je obrazem kružnice k a její tečny TX s bodem dotyku T některá kružnice k' a její tečna AX s bodem dotyku A. Kružnici k', která má poloměr r a dotýká se přímky AX v bodě A, můžeme ze zadání sestrojit, osa o je pak osou souměrnosti kružnic k, k' a bod X je průsečíkem této osy s úsečkou SA.

14.

Označme C' bod souměrně sdružený s vrcholem C podle osy $o = \leftrightarrow AB$. Úhly BAC, ABC jsou stejně jako úhly ABC, ABC' shodné; ze shodnosti střídavých úhlů BAC a ABC' plyne $AC \parallel BC'$, odkud $C' \in q$. Proto na přímce q leží rovněž obraz M' bodu M v souměrnosti s osou o, navíc $|AM'| = |AM|$, takže bod M' určíme jako průsečík přímky q s kružnicí $k(A, |AM|)$. Vrchol B pak sestrojíme jako průsečík přímky q s osou úsečky MM', vrchol C jako průsečík přímek p a BM.

15.

Sestrojme libovolnou tětivu $X'Y'$ kružnice k tak, aby $|X'Y'| = a$. Existuje rotace kolem středu S, která převede hledanou tětivu XY na tětivu $X'Y'$; obrazem M' bodu M je pak jeden z průsečíků úsečky $X'Y'$ s pomocnou kružnicí $m(S, |SM|)$. Tětivu XY pak určíme ve zpětné rotaci kolem středu S o orientovaný úhel $M'SM$.

16.

V jedné z rotací o $90°$ kolem středu A přejde bod B do bodu D, takže $D \in b \cap a'$, kde a' je obraz přímky a ve zmíněné rotaci.

17.

Označme S střed kružnice k. V jedné z rotací $\mathcal{R}(S, 90°)$ platí $\mathcal{R}(Y) = X$, takže obrazem přímky q je přímka q', která prochází bodem X kolmo k přímce p. Navíc přímka q' prochází bodem $Q' = \mathcal{R}(Q)$, který umíme sestrojit. Platí tedy $PX \perp Q'X$, takže bod X určíme jako průsečík kružnice k s Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem PQ'.

18.

Nechť X' je obraz bodu X v té rotaci o $60°$ kolem bodu B, ve které bod A přejde do bodu C. Protože je BXX' rovnostranný trojúhelník, platí $|BX| = |XX'|$ a úhel BXX' má stejně jako obvodový úhel BXC velikost $60°$, tudíž $X' \in XC$. Navíc úsečka CX' je obrazem úsečky AX ve zmíněné rotaci, tudíž $|CX'| = |AX|$. Dohromady dostáváme $|CX| = |CX'| + |X'X| = |AX| + |BX|$.

19.

V rotaci o $60°$ kolem bodu A, ve které bod B přejde do bodu C, přejde bod S do bodu S', jenž umíme sestrojit. Protože úsečka BS přejde v úsečku CS', platí $|CS'| = |BS| = b$, tudíž $C \in k_1(S, c) \cap k_2(S', b)$. Bod B je pak obrazem bodu C ve zpětné rotaci, ve které bod S' přejde do bodu S.

§8: Podobnost a stejnolehlost

1.
Nechť C_1 je střed úsečky AB. Protože těžiště T trojúhelníku ABC je obrazem jeho vrcholu C ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(C_1, +1/3)$, je hledanou množinou kružnice $\mathcal{H}(k)$ s výjimkou jejích průsečíků s úsečkou AB (neboť $C \neq A, B$).

2.
Sestrojte podobný trojúhelník $A'B'C'$ o stranách $(a', b', c') = (2, 3, 4)$ a ten pak podle jeho výšky v'_a zobrazte v podobnosti s koeficientem v_a/v'_a.

3.
a) Užijte Euklidovu větu (dále EV) o výšce pravoúhlého trojúhelníku, která rozděluje jeho přeponu na úseky délek a, b.
b) Dvakrát užijte Pythagorovu větu (dále PV), poprvé pro trojúhelník s odvěsnami a a b, podruhé pro trojúhelník s odvěsnami $\sqrt{a^2+b^2}$ a c.
c) K rovnosti $x : a = b : c$ užijte stejnolehlé trojúhelníky s dvojicemi stran (a, c) resp. (x, b) svírajícími společný (libovolně zvolený) úhel (tzv. konstrukce čtvrté geometrické úměrné).
d) Zvolte nejprve úsečku délky 1, sestrojte podle PV $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$ a pak užijte c) pro $b = \sqrt{2}$ a $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
e) Sestrojte čtvrté geometrické úměrné $y = (ab)/d$ a $x = (yc)/e$.
f) Podle PV sestrojte délku $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + a^2}$ a poté podle EV délku $\sqrt{(a\sqrt{2}) \cdot a}$.
g) Nejprve podle EV sestrojte délku $y = \sqrt{a(b + c)}$ a pak podle PV délku $x = \sqrt{a^2 + y^2}$.
h) Podle EV sestrojte délky $y = \sqrt{ab}$, $z = \sqrt{cd}$ a $x = \sqrt{yz}$.
i) Podle PV sestrojte délku $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ a podle EV délky $z = \sqrt{ab}$ a $x = \sqrt{yz}$.
j) Jako čtvrté geometrické úměrné sestrojíme délky $u = a^2/b$ a $v = c^2/d$, pak podle EV délky $y = \sqrt{au}$ a $z = \sqrt{cv}$, konečně podle PV délku $x = \sqrt{y^2 + z^2}$.

4.
Označme A_1, B_1, C_1 středy stran BC, AC resp. AB. Ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, +1/2)$ platí $A_1 = \mathcal{H}(Y)$, $B_1 = \mathcal{H}(Z)$ a $C_1 = \mathcal{H}(X)$, takže $XS \perp AB \parallel A_1B_1 \parallel YZ$, tedy $XS \perp ZX$, stejně jako $YS \perp XZ$ a $ZS \perp XY$. Bod S tedy dokážeme sestrojit jako průsečík výšek daného trojúhelníku XYZ. Přímky AB, BC a CA pak nalezneme jako osy úseček SX, SY resp. SZ.

5.
Ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(A, +3)$ platí $\mathcal{H}(Y) = X$, takže ze vztahu $Y \in k$ plyne $X \in k' = \mathcal{H}(k)$. Bod X tedy leží v průsečíku kružnice k s kružnicí k'.

6.

Jde-li o tětivu XA kružnice k_1 a tětivu AY kružnice k_2, ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(A,-2)$ platí $\mathcal{H}(Y)=X$, takže z $Y\in k_2$ plyne $X\in k_2'=\mathcal{H}(k_1)$, tudíž $X\in k_1\cap k_2'$.

7.

Označme S průsečík přímek p a AB (kdyby platilo $p \parallel AB$, byl by $AXYB$ rovnoběžník). Ze stejnolehlosti úseček AX a BY plyne, že ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S,+1/2)$ nebo $\mathcal{H}(S,-1/2)$ platí $\mathcal{H}(A)=B$, takže S je jeden ze dvou bodů polopřímky AB, pro který platí $|AS|=2\cdot|AB|$ nebo $|AS|=\frac{2}{3}|AB|$. Pak $p=\leftrightarrow SC$.

8.

Nechť X je bod dotyku kružnic k a k_1. Ve stejnolehlosti $\mathcal{H}$ se středem X, ve které $\mathcal{H}(k)=k_1$, je přímka $t_1=\mathcal{H}(t)$ tečnou kružnice k_1 rovnoběžnou s danou přímkou t, takže ji umíme sestrojit (pozor: existují dvě takové tečny). Je-li T_1 bod dotyku t_1 a k, platí $T_1=\mathcal{H}(T)$, takže X (střed $\mathcal{H}$) určíme takto: $X\in k\cap\leftrightarrow TT_1$.

9.

Je-li $a \parallel b$, využijeme posunutí, jinak označíme $V\in a\cap b$ a sestrojíme libovolnou kružnici k', která se dotýká obou přímek a, b a leží ve stejném úhlu jimi vymezeném jako bod M. Ve stejnolehlosti $\mathcal{H}$ se středem V a kladným koeficientem, ve které $\mathcal{H}(k)=k'$, přejde bod M do bodu $M'\in k'\cap\mapsto SM$, který proto umíme sestrojit (pozor: průsečíky jsou dva). Ke konstrukci středu S kružnice k ze středu S' kružnice k' je pak výhodné využít úseček $M'S'$ a MS, jež jsou stejnolehlé podle středu V.

10.

Nechť o_1,o_2,o_3 značí osy a A_1,B_1,C_1 středy stran BC, CA resp. AB. Jak víme $S\in o_1\cap o_2\cap o_3$ a $T\in AA_1\cap BB_1\cap CC_1$. Navíc ve stejnoolehlosti $\mathcal{H}(T,-2)$ platí $\mathcal{H}(A_1)=A$, $\mathcal{H}(B_1)=B$ a $\mathcal{H}(C_1)=C$, takže pro přímky $o_i'=\mathcal{H}(o_i)$, $i=1,2,3$ platí $A\in o_1' \parallel o_1\perp BC$, podobně $B\in o_2'\perp CA$ a $C\in o_3'\perp BC$. Na přímkách o_i' procházejících jedním bodem $S'=\mathcal{H}(S)$ tedy leží výšky trojúhelníku ABC, tím je existence ortocentra $V=S'$ dokázána včetně rovnosti $\overrightarrow{VT}=-2\overrightarrow{ST}$. **11.**

Na kružnici k opsané ΔABC leží obrazy U_1, U_2, U_3 ortocentra V v osových souměrnostech podle přímek BC, CA resp. AB (vysvětlete pomocí obvodových úhlů, např. $|\sphericalangle BCU_1|=|\sphericalangle BCV|=90^\circ-\beta$, je-li β ostrý). Na kružnici k rovněž leží obrazy W_1, W_2, W_3 ortocentra V ve středových souměrnostech podle středů A_1, B_1, C_1 stran BC, CA resp. AB (opět využijte obvodových úhlů a toho, že např. BW_1CV je rovnoběžník). Obrazem kružnice k ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(V,+1/2)$ je tedy kružnice, na které leží jak středy stran A_1, B_1, C_1 (obrazy bodů W_1, W_2, W_3 v $\mathcal{H}$) a paty výšek V_1, V_2, V_3 (obrazy bodů U_1, U_2, U_3 v $\mathcal{H}$), tak i středy X, Y, Z úseček AV, BV, CV (obrazy bodů A, B, C v $\mathcal{H}$).

§9: Planimetrické výpočty

1.
$c = 14$
2.
$\sqrt{3}/2$
3.
$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)$$
4.
$$\frac{a^3 b}{4(a^2+b^2)}$$
5.
$$\frac{a(1-2\cos\alpha)}{2\sin\alpha}$$
6.
$$\frac{P}{z}+\frac{z^3}{16P}$$
7.
$\sqrt{2}$
8.
$$\frac{|a-b|\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$$
9.
$$4+\frac{8\sqrt{3}}{3}$$
10.
$$\frac{2ab}{a+b}$$
11.
Dosaďte $v_a = c\sin\beta$ a $v_b = c\sin\alpha$ do rovnosti $\dfrac{av_a}{2} = \dfrac{bv_b}{2}$.
Je-li D střed BC a S střed opsané kružnice, platí $\sin\alpha = \dfrac{|DC|}{|SC|} = \dfrac{a}{2R}$.
12.
Nechť $\varphi = |\sphericalangle ADB|$, kde D je střed BC. Sečtěte kosinové věty
$c^2 = t_a^2 + (a/2)^2 - at_a\cos\varphi$ a $b^2 = t_a^2 + (a/2)^2 + at_a\cos\varphi$.
13.
Je-li T těžiště trojúhelníku, pak $AT \perp BT \iff |AT|^2 + |BT|^2 = c^2$.
Dosaďte sem
$$|AT|^2 = \frac{4t_a^2}{9} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9},\ |BT|^2 = \frac{4t_b^2}{9} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}.$$
14.
Ze sinové věty $|AP|:|AC| = \sin\dfrac{\gamma}{2}:\sin\varphi$ a $|BP|:|BC| = \sin\dfrac{\gamma}{2}:\sin(\pi-\varphi)$,

kde $\varphi = |\sphericalangle APC|$, odkud $|AP| : |BP| = |AC| : |BC|$. Podobně odvodíte úměru $|AQ| : |BQ| = |AC| : |BC|$. Protože úhel PCQ je pravý, leží bod C na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem PQ, jehož krajní body P, Q jsou dle předchozího určeny poměrem $k = |AC| : |BC|$. Je-li naopak C' libovolný bod zmíněné kružnice ($C' \neq P, Q$), ukážeme, že platí $|AC'| : |BC'| = k$. K tomu podle předchozího stačí dokázat rovnost velikostí úhlů $\gamma_1 = |\sphericalangle PC'A|$ a $\gamma_2 = |\sphericalangle PC'B|$. Provedeme to v případě $k > 1$, kdy uvažované body leží na přímce v pořadí A, P, B, Q (případ $0 < k < 1$ se posoudí analogicky nebo se „prohozením" bodů A, B přejde od poměru k k poměru $1/k$.) Protože úhly $AC'Q$, $BC'Q$ mají po řadě velikosti $90° + \gamma_1$, $90° - \gamma_2$, jako výše se ze sinové věty odvodí rovnosti

$$k = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AC'| \cdot \sin\gamma_1}{|BC'| \cdot \sin\gamma_2} \quad \text{a} \quad k = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AC'| \cdot \cos\gamma_1}{|BC'| \cdot \cos\gamma_2},$$

odkud $\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma_2$, neboli $\gamma_1 = \gamma_2$.

15. Z kosinové věty $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ a $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$; obě rovnosti sečtěte a využijte toho, že z $\alpha + \beta = 180°$ plyne $\cos\alpha + \cos\beta = 0$.

16.
$\varrho = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)R}{2}$

17.
$\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

18.
$\operatorname{cotg}|\sphericalangle BDA| = \dfrac{1 - 2\cos\beta}{2\sin\beta}$ [Užijte sinovou větu pro ΔABD, v němž $|AB| : |BD| = 2 : 1$.]

19.
$R = \dfrac{br}{c}$

20.
$|MN| = \sqrt{\dfrac{4c^2}{9} + \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{2bc\cos\alpha}{3}}$

21.
$\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\frac{\alpha}{2}}$ [Nejprve pomocí mocnosti vrcholu V daného úhlu ke zmíněné kružnici $k(S, r)$ ukažte, že pro bližší konce A, B uvažovaných tětiv platí $|VA| = |VB|$. Pak využijte pravoúhlé trojúhelníky s vnitřním úhlem $\alpha/2$ k určení délky $|VA|$ a vzdálenosti d středu S od středů uvažovaných tětiv. Nakonec dosaďte do $r = \sqrt{d^2 + a^2/4}$.]

22.
Do obou stran dokazované rovnosti dosaďte vyjádření

$$|AB| = 2R\sin(\alpha+\beta-\omega),\quad |BC| = 2R\sin(\alpha-\omega),\quad |CD| = 2R\sin\omega,$$
$$|DA| = 2R\sin(\beta-\omega),\quad |BD| = 2R\sin\alpha,\quad |AC| = 2R\sin\beta$$

a pak využijte opakovaně vzorec $2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

§10: Stereometrické výpočty

1.
a) $\arccos(\sqrt{3}/3)$
b) $\arccos(1/3)$
2.
$\arccos\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{4b^2-a^2}}$
3.
$2S(3-\sqrt{3})$
4.
Obsah stěny ADC je $\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|AD|\sin\gamma$, příslušná tělesová výška je $|AB|\sin\beta\sin\varphi$.
5.
Obsah řezu je $a^2\sqrt{6}/9$, poměr objemů je $5:4$.
6.
$$\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$$
7.
Objem je $\dfrac{ab\cdot\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}{12}$, povrch je $\dfrac{b\cdot\sqrt{4c^2-b^2}}{2}+\dfrac{a\cdot\sqrt{4c^2-a^2}}{2}$.
8.
Objem je $\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$, obsah řezu je $\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.
9.
Označme P_1, resp. P_2 obsah větší, resp. menší podstavy. Z podobnosti pro výšku x odříznutého jehlanu platí $\dfrac{v+x}{x}=\dfrac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$, vypočtěte odsud x a dosaďte do $V=\dfrac{1}{3}P_1(v+x)-\dfrac{1}{3}P_2x$.
10.
Výška x boční stěny je $\dfrac{1}{2}(a-b)\operatorname{tg}\varphi$, tělesovou výšku w určíme ze vztahu $x^2=w^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$.

11.

a) Poměr objemů je $32 : (12\sqrt{2}) : 9$, poměr obsahů $16 : 12 : 9$.

b) Poměr objemů i poměr obsahů je $4 : 6 : 9$.

12.

$$\frac{\pi(r_1 r_2)^2 v}{3(r_1 + r_2)^2}$$

13.

Strana kužele je $s = \dfrac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, poloměr $r = \dfrac{s\alpha}{2\pi}$, výška $v = \sqrt{s^2 - r^2}$.

14.

Objem je $\dfrac{\pi\left(3 + \sqrt{2}\right)a^3}{12}$, povrch je $\dfrac{\pi\left(3 + \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}\right)a^2}{4}$.

15.

Povrch je $2\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$, objem je $\dfrac{2\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\sqrt{r_1 r_2}}{3}$. [Pro stranu s a výšku v tohoto kužele platí $s = r_1 + r_2$, $s^2 = v^2 + (r_1 - r_2)^2$.]

16.

$$\frac{\pi s^3 \cdot \sin\alpha \cdot (2 - \cos 2\alpha)}{12}$$

[Poloměry $r_{1,2}$ podstav kužele určete ze soustavy rovnic $r_1 - r_2 = s \cdot \cos\alpha$, $r_1 + r_2 = v = s \cdot \sin\alpha$.]

17.

Objem je $\dfrac{\pi m^3 \sin^2\alpha \cos\alpha}{3(1 + \cos\alpha)^3}$, povrch je $\dfrac{\pi m^2 \sin\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)}{(1 + \cos\alpha)^2}$.

18.

Vidí jednu čtvrtinu. [Výšku v kulového vrchlíku určete z Euklidovy věty o odvěsně: $(R_Z - v)(R_Z + h) = R_Z^2$.]

19.

$$\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}$$

[Poloměr r kulové plochy je $\sqrt{\dfrac{S_1 + S_2}{4\pi}}$, výška v vrchlíku $\dfrac{S_1}{\sqrt{\pi(S_1 + S_2)}}$, poloměr ϱ kruhového řezu z Euklidovy věty o výšce: $\varrho = \sqrt{v(2r - v)}$.]

20.

$\dfrac{\pi h^3 \sin^2\alpha \cdot (1 + \cos^2\alpha)}{6}$ [Těleso se skládá z kulové úseče, jejíž výšku označíme v, a z rotačního kužele o výšce $(h - v)$. Výšku v a poloměr r společné podstavy obou těles určíme ze vztahů

$$\sin 2\alpha = r : \left(\frac{h}{2}\right) \quad \text{a} \quad \cos 2\alpha = \left(\frac{h}{2} - v\right) : \left(\frac{h}{2}\right),$$

které dostaneme z osového řezu kužele, v němž se opsaná koule znázorní jako kruh o poloměru $h/2$ a podstava obou těles jako jeho tětiva, jíž přísluší středový úhel 4α.]

OBSAH