4. Dokonalá čísla

Již starořečtí matematikové znali čtyři pozoruhodná čísla, která je fascinovala. Byla to čísla 6, 28, 496 a 8 128.

V čem spočívala jejich pozoruhodnost?

Každé z těchto čtyř čísel je rovno součtu všech svých vlastních dělitelů. (Připomeňme si, že vlastní dělitel čísla n je každý dělitel menší než n.) Skutečně,

$$6 = 1 + 2+3, \quad 28=1+2+4+7+14 \quad \text{atd.}$$

Tato vlastnost musela doslova uchvátit zejména pýthagorejce, kteří prohlásili číslo za základ a podstatu světa. Podle jejich učení řád světa podle nich vzniká spojováním protikladů v určitých číselných poměrech a jen dodržování těchto poměrů zaručuje harmonii. Čísla s popsanou vlastností proto nazvali **dokonalá**.

První, skutečně mimořádně důležitý výsledek o těchto číslech, odvodil již kolem roku 300 př. n. l. EUKLEIDÉS v *Základech*, o nichž jsme se již zmiňovali. V IX. knize, části XXXVI, dokázal následující tvrzení:

Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ku dvěma, až součet všech se stane prvočíslem, a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vzniklé číslo bude dokonalé.

Jinak řečeno, *je-li* $1+2+4+8 + \dots + 2^n$ *prvočíslo, pak je číslo* $2^n.(1+2+4+8 + \dots + 2^n)$ *dokonalé.*

Protože však

$$1+2+4+8 + .. + 2^n = 2^{n+1}-1,$$

můžeme Eukleidův výsledek zformulovat takto:

je-li $M_n = 2^n-1$ *prvočíslo, je číslo* $P_n = M_n \,.\, (2^n-1)$ d*okonalé.*

V právě zavedeném označení tedy můžeme říci, že již v antice byla známa dokonalá čísla P_2, P_3, P_5 a P_7.

(Pro úplnost dodejme, že označení M_n souvisí s tím, že prvočísla tohoto tvaru se nazývají MERSENNOVA. O důvodech se více dozvíme v dalším oddílu.)

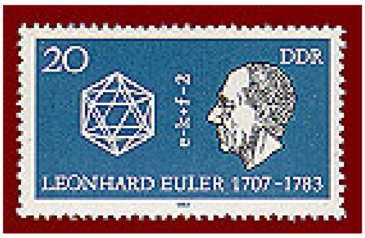
Uvedená čtyři čísla uvádí ve své učebnici *Arithmétiké eisagógé* (tj. *Úvod do* matematiky) i Níkomachos z Gerasy, řecký filosof z první poloviny 2. století n.l. Tuto učebnici komentoval zhruba o 150 let později Iamblichos z Chalkidy (asi 270 -- 330), který ještě 800 let po pythagorejcích připisoval číslům různé magické vlastnosti.

Protože čísla 6, 28, 496 a 8 128 mají postupně 1, 2, 3 a 4 cifry, vyslovil hypotézu, že pro každé přirozené *n* existuje právě jedno dokonalé číslo o *n* cifrách a na posledním místě se pravidelně střídají číslice 6 a 8.

První část Iamblichovy hypotézy je nesprávná, což koneckonců není překvapující. Vycházela totiž z preference dekadického zápisu čísel, ačkoliv z čistě matematického hlediska není žádný důvod, proč desítkovou soustavu preferovat proti ostatním. Druhá část Iamblichovy hypotézy je alespoň zčásti správná; každé dokonalé číslo skutečně končí cifrou 6 nebo 8. Víme dokonce ještě více: každé dokonalé číslo končí (v dekadickém zápisu) buďto dvojčíslím 28 nebo cifrou 6, před níž stojí liché číslo. Číslice 6 a 8 se však pravidelně nestřídají.

Již ve středověkých rukopisech je zmiňováno páté dokonalé číslo 33 550 336 (= P_{13}), není však známo, kdo je objevil. (Někdy je jeho objevení připisováno J. Müllerovi (1436 -- 1476), známému pod jménem Regiomontanus. Další dvě dokonalá čísla, šesté a sedmé, našel v r. 1603 Pietro Cataldi (1552 -- 1626); jejich hodnoty jsou 8 589 869 056 (= P_{17}) a 137 438 691 328 (= P_{19}). Všechna tato čísla přitom byla tvaru, který uváděl Eukleidés, přestože ten dokázal pouze **dostatečnost** výše uvedené podmínky.

Že tyto výsledky byly zákonité, dokázal až v 18. století, dva tisíce let po Eukleidovi, Euler, který odvodil, že **sudá** dokonalá čísla jsou právě čísla popsaná Eukleidem. Sám Euler našel další, již osmé dokonalé číslo $P_{31} = 2^{30} \cdot M_{31}$.



Euler na východoněmecké známce

Toto číslo bylo dlouho považováno za největší dokonalé číslo, které bylo možno odhalit. (Přesněji řečeno, Eulerovým cílem bylo zjistit, zda je číslo M_{31} prvočíslo. O důvodech těchto snah budeme podrobně hovořit později. Dokonalé číslo P_{31} pak bylo „vedlejším produktem“ tohoto snažení.)

Ještě například v roce 1814 napsal anglický matematik P. Barlow ve své knize *A New Mathematical and Philosophical Dictionary*, že *toto poslední* *dokonalé číslo je největším dokonalým číslem známým v současnosti a pravděpodobně největším, jaké kdy bude objeveno*.

Nalezení podstatně větších dokonalých čísel umožnil až nástup výpočetní techniky ve 20. století. O tom však budeme podrobněji hovořit v části o hledání velkých prvočísel.

Ještě jsme však nevysvětlili jednu věc. Všechna prozatím popisovaná dokonalá čísla byla **sudá**. Jak je to tedy s **lichými** dokonalými čísly?

Odpověď je dosti překvapivá: **nevíme**! Jejich existence je jedním z dosud nevyřešených problémů a o nalezení důkazu jejich existence či neexistence panuje dosti velká skepse. Je pouze známa řada dílčích výsledků, typu:

Liché dokonalé číslo -- pokud existuje -- musí být větší než 10^{200}, *musí mít alespoň 8 prvočíselných dělitelů, z nichž aspoň jeden musí být větší než 300 000; je-li menší než* $10^{9\,118}$, *musí být dělitelné 6. mocninou některého prvočísla, atd.*