Typy příkladů pro I. část písemky ke zkoušce z MA I

I. Reálná a komplexní čísla.

1. Udejte příklad množiny $A \subseteq \mathbb{R}$ takové, že $\sup A = 1$, $\inf A = -1$, přičemž $1 \notin A$, $-1 \in A$.
2. Určete supremum množiny $A = \{0,5;\ 0,55;\ 0,555;\ 0,5555;\ \dots\}$.
3. Určete supremum a infimum množiny $A = \{\frac{n^2}{n^2+1}\sin(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}),\ n \in \mathbb{N}\}$.
4. Řešte nerovnost $\frac{(x+1)(x+2)^3(x-5)}{(x-1)^2(x+4)} \leq 0$
5. Řešte nerovnost $|x+1| + |x-2| \leq 5$.

II. Mnohočleny a racionální lomené funkce.

1. Určete mnohočlen s *reálnými* koeficienty, jehož kořeny jsou $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 - i$, přičemž kořen α_1 je dvojnásobný.
2. Proveďte dělení mnohočlenů $(x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 1) : (x^2 - x + 1)$.
3. Napište tvar rozkladu na parciální zlomky racionální lomené funkce $\frac{1}{x^6+2x^4+x^2}$ (neurčité koeficienty nepočítejte).
4. Rozhodněte, zda $\alpha = -1$ je kořenem mnohočlenu $P(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x + 1$, pokud ano, určete jeho násobnost.
5. Pomocí Hordnerova schématu vypočtěte $P(2)$, je-li $P(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^2 - 3x + 1$. Popište postup výpočtu a tento postup zdůvodněte.
6. Určete kořeny polynomu $z^6 - z^3 - 2$.

III. Limita a spojitost.

1. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro níž $\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = -1$.
2. Vypočtěte limity a) $\lim_{x\to -1\pm} \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$, b) $\lim_{x\to 1\pm} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-3x+2}}$.
3. Rozhodněte, zda funkce $f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \geq 0, \\ \frac{x+\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$ je spojitá v bodě $x = 0$.
4. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má limitu v bodě $x = 1$ a v žádném jiném bodě limitu nemá.
5. Udejte příklad funkcí f, g takových, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$ neexistuje.
6. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá v bodech $x = 1$ a $x = 2$ a v žádném jiném bodě není spojitá.
7. Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+5} - \sqrt{x^2+3x-2})$.
8. Určete body nespojitosti a jejich druh pro funkce a) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, b) $x \operatorname{cotg} x$.
9. Formulujte první Bolzanovu větu a pomocí této věty rozhodněte, ve kterém z intervalů a) $[-2,-1]$ b) $[-1,1]$, c) $[1,3]$ leží (jediný) reálný kořen polynomu $x^3 + 2x + 2$. Odpověď zdůvodněte.
10. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: *Každý polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.* Pokud ano, tvrzení dokažte, pokud ne, uveďte protipříklad.
11. Vypočtěte $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.
12. Vypočtěte limity a) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}$, b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

IV. Posloupnosti.

1. Udejte příklad posloupnosti a_n takové, že čísla ± 1 jsou hromadnými body posloupnosti a $a_n \notin \{-1, 1\}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Vypočtěte limity: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{n2^n+3^n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} 2^{\frac{n}{n^2+1}}$.
3. Udejte příklad posloupnosti a_n mající nekonečně mnoho hromadných bodů.
4. Udejte příklad posloupností a_n, b_n takových, že $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$ a $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$ neexistuje.
5. Udejte příklad posloupnosti a_n, pro níž $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = 0$.

V. Základní vlastnosti funkcí.

1. Určete intervaly, kde je daná funkce prostá a na těchto intervalech určete funkci inverzní: $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+4x+4}$.
2. Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{x-1}$.
3. Rozhodněte, zda je daná funkce sudá nebo lichá: $f(x) = |x^3| \frac{2^x-2^{-x}}{2} \arcsin \frac{x}{x^2+1}$.
4. Určete nejmenší periodu funkce $f(x) = \sin 3x + \mathrm{tg} 2x$.
5. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: *Je-li $p > 0$ periodou funkce f, pak je periodou i číslo np pro $\forall n \in \mathbb{N}$.*
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots)$. Určete $f^{10}(x)$.
7. Udejte příklad nekonstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že každé kladné racionální číslo je její peroidou.
8. Načtněte grafy funkcí a) $y = \frac{1+x}{1-x}$, b) $y = -x^2 + 4x + 5$.
9. Udejte příklad rostoucích funkcí $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f - g$ je periodická s periodoy π.
10. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je současně sudá i lichá.

VI. Elementární funkce.

1. Načrtněte grafy funkcí a) $y = \sin \frac{x-\pi/2}{2}$, b) $y = \arcsin \frac{x-1}{3}$.
2. Určete definiční obor $y = \sqrt{\mathrm{arctg} \frac{x+1}{2x+1} - \frac{\pi}{4}}$.
3. Určete, pro která x platí $\log_2 \frac{x+2}{x+1} < 1$.
4. Rozhodněte, pro která α platí identita $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.
5. Řešte rovnici $2\arccos(x^4 - 3x^2 + 2) = \pi$.
6. Načrtněte grafy funkcí $y = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\, x)$, $y = \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, x)$.

VII. Derivace funkce, L'Hospitalovo pravidlo.

1. Rozhodněte, zda existuje $f'(0)$, je-li $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$
2. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má derivaci v bodě $x = -1$ a v žádném jiném bodě derivaci nemá."
3. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = x^x$ v bodě $x = 1$.
4. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá v bodě $x = 0$, ale $f'(0)$ neexistuje.
5. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale $f''(2)$ neexistuje.
6. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = 1$.
7. $y = \frac{x^2}{1+x}$. Určete $y^{(100)}$.
8. Určete číslo $c \in (0,1)$ z Lagrangeovy věty, je-li $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \sqrt{x}$.
9. Pomocí vzorce pro derivaci inverzní funkce odvoďte vzorec $[\mathrm{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.
10. Přímo z definice derivace dokažte vzorec a) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$. b) $(\cos x)' = -\sin x$.
11. Vypočtěte a) $\lim_{x\to 0+} x^x$, b) $\lim_{x\to 1+} x^{\frac{1}{1-x}}$

VIII. Průběh funkce, extrémy.

1. Určete počet reálných kořenů kubické rovnice $x^3 - 12x + 8 = 0$.
2. Udejte příklad funkce jejíž asymptotou v $+\infty$ je přímka $y = x + 1$ a asymptotou v $-\infty$ je přímka $y = 0$.
3. Určete intervaly, kde je funkce $\ln\frac{x+1}{x-2}$ konvexní a konkávní.
4. Určete absolutní maximum a minimum funkce $f(x) = x - 1 - \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$.
5. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro níž $f'(0) = 0$, ale v bodě $x = 0$ nenastává lokální extrém.
6. Rozhodněte, zda platí tvrzení: *Je-li funkce f rostoucí na intervalu (a, b) a v každém bodě (a, b) existuje f', pak $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.* Pokud ano dokažte, pokud ne, udejte protipříklad.
7. Rozhodněte, zda funkce $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ pro } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ pro } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ má v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ lokální extrém, pokud ano, rozhodněte, zda je to minimum nebo maximum.
8. Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f'(x_0) = \cdots = f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) > 0$. Rozhodněte, zda má funkce f v x_0 lokální extrém.
9. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má na intervalu $(-\pi, \pi)$ právě 3 lokální ostrá minima a právě jedno ostré lokální maximum.
10. Funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou konvexní a existují f'', g''. Udejte dostatečnou podmínku, aby složená funkce $f(g(x))$ byla konvexní.
11. Kladné číslo a rozložte na součet dvou sčítanců tak, aby jejich součin byl maximální.

IX. Diferenciál a Taylorův mnohočlen v $\mathbf{R}^1$.

1. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\arcsin 0,47$.
2. Rozhodněte, zda funkce $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x > 0, \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ je diferencovatelná v bodě $x = 0$, pokud ano, určete $df(0)$.
3. Napište Maclaurinův rozvoj funkcí $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = \lg(1 + x)$ (včetně zbytku v Lagrangeově tvaru).
4. Určete Taylorův mnohočlen 2. stupně funkce $f(x) = x^x$ v bodě $x_0 = 1$.
5. Pomocí Taylorova mnohočlenu 2. stupně vypočtěte přibližně $\operatorname{arctg} 1,05$.
6. Určete horní odhad chyby při přibližném vyjádření $\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$.
7. Určete rovnici tečny ke křivce dané parametricky $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ v bodě $[\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$.
8. Rozhodněte, zda křivka $x = t + \sin t$, $y = \cos 2t$ v okolí bodu $[1 + \frac{\pi}{2}, -1]$ leží pod tečnou nebo nad tečnou v tomto bodě.

X. Primitivní funkce.

1. Určete primitivní funkci k funkci $f(x) = |x - 1|$.
2. Udejte příklad funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ k níž neexistuje primitivní funkce. Zdůvodněte.
3. Vypočtěte a) $\int \arcsin x \, dx$, b) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} \, dx$.
4. Vypočtěte $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.
5. Vypočtěte $\int \frac{x+3}{2x^2+3x+1} \, dx$.
6. Vypočtěte $\int \sin 4x \sin 3x \, dx$.

7. Integrál $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ transformujte vhodnou substitucí na integrál z racionální lomené funkce. (Vzniklý integrál už nepočítejte).
8. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá v bodě x_0. Vypočtěte $\lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx}{h}$.
9. Vypočtěte $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.
10. Vhodnou substitucí převeďte $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x\cos x}\,dx$ na integrál z racionální lomené funkce. (Vzniklý integrál už nepočítejte).

XI. Riemannův integrál, aplikace.

1. Udejte příklad funkce, pro níž $\underline{\int}_0^1 f(x)\,dx = -3$, $\overline{\int}_0^1 f(x)\,dx = 1$.
2. Udejte příklad funkce f, která není integrovatelná na $[0,1]$, ale $|f|$ je zde integrovatelná.
3. $f(x) = |x|$, $I = [-1,1]$, $D_n = \{-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Určete $s(f,D_n)$, $S(f,D_n)$.
4. Vypočtěte $\int_0^{e-1} \lg(x+1)\,dx$.
5. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule s poloměrem R.
6. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kružnice s poloměrem R.
7. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet povrchu pláště komolého kužele s poloměry podstav R a r a výškou h.
8. Rozhodněte, zda konverguje nevlastní integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x^3}}$.
9. Rozhodněte, pro která α konverguje integrál $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.
10. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a a b.

Cvičná písemka č. 1 ke zkoušce z MA I

I. část. (Každý příklad 1 bod).

1. Napište tvar rozkladu na parciální zlomky funkce $\frac{x^3+1}{x^6+3x^4+2x^2}$ (neurčité koeficienty neurčujte).
2. Určete intervaly, kde je daná funkce prostá a zde určete funkce inverzní: $y = \ln(x^2+2x+2)$.
3. Udejte příklad funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro níž $\lim_{x\to 1-} f(x)$ neexistuje a $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$.
4. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = \frac{x^2}{x-1}$ v bodě $[2,4]$.
5. Přímo z definice odvoďte vzorec pro derivaci $\left(\frac{1}{x}\right)'$.
6. Určete Taylorův mnohočlen druhého stupně se středem $x_0 = 0$ funkce $y = \lg(x+\sqrt{1+x^2})$.
7. Udejte příklad funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jejíž asymptoty bez směrnice jsou $x = 1$, $x = -1$ a přímka $y = 0$ je asymptotou pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.
8. Vypočtěte $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.
9. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací křivky $y = \sin x$, $x \in [0,\pi]$, kolem osy x.
10. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,dx$

II. část.

1. (3b.) Derivujte a upravte

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

2. (3b.) Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{\mathrm{e}^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

3. (4b.) Vypočtěte

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x} dx.$$

Cvičná písemka č. 2 ke zkoušce z MA I

I. Část. (Každý příklad 1 bod).

1. Určete kořeny polynomu $z^4 - 7z^2 - 8$.
2. Pomocí A a δ definujte $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$. Udejte konkrétní příklad funkce spňující tento vztah a načrtněte její graf v okolí bodu $x = 1$.
3. Udejte příklad posloupnosti a_n mající právě 3 hromadné body 0,1,3, přičemž $a_n \notin \{0,1,3\}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. Načrtněte graf funkce $y = \arcsin\frac{x+2}{3}$.
5. Určete číslo c z Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci $f(x) = x^3$ na intervalu $[a,b] = [0,1]$.
6. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{4,05}$.
7. Určete Maclaurentův rozvoj (včetně zbytku) funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$.
8. Integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ transformujte vhodou substitucí na integrál z racionální lomené funkce. (Vzniklý integrál z rac. lomené funkce už nepočítejte).
9. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem podstavy R a výškou h.
10. Udejte příklad funkcí f, g, které nejsou integrovatelné na intervalu $[0,1]$ a jejich součet $f+g$ je zde integrovatelný.

II. Část.

1. Vypočtěte limity (2b. + 2b.)

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi x}{4x+1}\right)^x, \quad b)\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

2. (3b.) Do půlkruhu o poloměru R vepište lichoběžník s maximálním obsahem. Tento obsah určete. (Základna lichoběžníka je totožná s průměrem půlkruhu).
3. (3b.) Určete v jakém poměru dělí parabola $y^2 = 2x$ plochu kruhu $x^2 + y^2 = 8$.