Typy příkladů pro I. část písemky ke zkoušce z MA II

I. Diferenciální rovnice.

1. Určete obecné řešení rovnice $y' = -y^2 \sin^2 x$.
2. Určete řešení rovnice $y' = \frac{y}{x}$ splňující počáteční podmínku $y(1) = 0$.
3. Rovnici $y' = \frac{x+y+1}{x-y-1}$ převeďte vhodnou transformací na rovnici homogenní (vzniklou homogenní rovnici již neřešte).
4. Určete obecné řešení Clairautovy rovnice $y = xy' + \sqrt{y'}$.
5. Určete jaká substituce transformuje rovnici $y' = xy + \sqrt{y}$ na lineární rovnici, tuto substituci proveďte (vzniklou lineární rovnici již neřešte).
6. Určete libovolné partikulární řešení rovnice $y'' + y' = x$.
7. Určete lineární homogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém řešení je $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$.
8. Určete řešení rovnice $y'' - y = 0$, pro něž $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
9. Rozhodněte, zda dvojice $y_1 = x$, $y_2 = x\mathrm{e}^{x}$ může tvořit fundamentální systém řešení nějaké homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Pokud ano, rovnici určete, pokud ne, zdůvodněte.
10. Určete kolik řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ splňuje počáteční podmínku $y(0) = 0$. Pokud je řešení více, určete alespoň 2 různá.
11. V jakém tvaru lze hledat partikulární řešení rovnice $y'' + y = \sin x$. Toto řešení vypište s neurčitými koeficienty, které již neurčujte.
12. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y''' - y = 0$.
13. Pomocí variace konstant určete partikulární řešení rovnice $y'' = x$.

II. Metrické prostory.

1. Určete $\rho_c(f, g) = \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)-g(x)|$, $\rho_I(f, g) = \int_0^\pi |f(x)-g(x)|\,dx$, je-li $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = -\cos x$.
2. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$, $A = [2, 3]$. Určete vzdálenost bodu A od M v metrikách ρ_1 a ρ_∞.
3. Udejte příklad nekonstantní cauchyovské posloupnosti v $\mathbb{E}^2$.
4. $P = C[0, 1]$. Udejte příklad posloupnosti funkcí $f_n(x) \not\equiv x$, pro níž $\rho_c(f_n, f) \to 0$, kde $f(x) = x$.
5. $P = \mathbb{N}$, $\rho(n, m) = \frac{|n-m|}{nm}$. Rozhodněte, zda je posloupnost $\{n\}$ cauchyovská.
6. Rozhodněte, zda existuje $A \subseteq \mathbb{E}^1$, pro níž $\mathring{A}=\{0, 1\}$. Pokud ano, udejte příklad, pokud ne, zdůvodněte.
7. Rozhodněte, zda platí: $F : P \to P$ je kontrakce $\Rightarrow$ F je spojité. Pokud ano, dokažte, pokud ne – udejte protipříklad.
8. Určete, pro které hodnoty $k \in \mathbb{R}$ je zobrazení $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ dané předpisem $[x, y] \to [k(x + y), k(x - y)]$ izometrické.
9. $P = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = \begin{cases} |x| + |y|, & \text{pro } x \neq y \\ 0, & \text{pro } x = y \end{cases}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 1], \\ 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\{[-1, 1]\} \end{cases}$
   Rozhodněte, zda f je spojité zobrazení $(P, \rho) \to \mathbb{E}^1$.

10. Pro (P, ρ) jako v předchozím příkladě rozhodněte, zda $A = [-1, 1]$ je kompaktní. Zdůvodněte.
11. Rozhodněte, zda platí implikace: (P, ρ) je kompaktní $\Rightarrow$ (P, ρ) je úplný.
12. Určete, pro která $k \in \mathbb{R}$ je zobrazení $x \to \frac{k}{k+2}x$ kontrakce.
13. $P = \mathbb{R}^2$, $\rho_1([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. Rozhodněte, zda zobrazení $[x, y] \to [\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y]$ je kontrakce v prostoru (P, ρ).
14. V prostoru l_2 = prostor posloupností $\{x_n\}$ s metrikou

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

určete vzdálenost posloupností $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots\}$, $y_n = \{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots\}$.

15. Najděte vzdálenost počátku od přímky $y = 2 - x$ v
    a) Euklidovské metrice,
    b) V součtové metrice ρ_1.
16. Nechť $A = [-1, 0] \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{1\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$ v $\mathbb{E}^1$. Určete vnitřek, uzávěra hranici množiny A.
17. Dokažte existenci a najděte pevný bod zobrazení $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, které je složeno ze stejnolehlosti se středem v počátku $[0, 0]$ a s koeficientem $k = \frac{3}{4}$ a posunutí o vektor $u = (-1, -1)$.
18. Dokažte existenci a najděte pevný bod zobrazení $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ daného předpisem $[x, y] \to [-\frac{1}{2}y, \frac{1}{\ }(x + y)]$.
19. Pomocí Banachovy věty najděte funkci $y(x)$, která se rovná své derivaci a $y(0) = 1$.
20. Dokažte existenci a pomocí posloupnosti postupných aproximací s počáteční aproximací $x_0 = 0$ najděte pevný bod zobrazení $F : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1$, $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$.

III. Limita, spojitost, parciální derivace, diferenciál.

1. Vypočtěte limity.
   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \lg(x^2 + y^2)$,
   b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,0)} \mathrm{e}^y \frac{x+y}{2x+y}$,
   c) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)}$.
2. Rozhodněte, zda funkce $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$ je spojitá v bodě $[0, 0]$.
3. Načrtněte v rovině definiční obor funkce $f(x, y) = \lg(\lg(2x - x^2 - y^2 + 2y))$
4. Rozhodněte, která tvrzení platí:
   a) Existují $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \Rightarrow f$ je spojitá v $[x_0, y_0]$,
   b) f je diferencovatelná v $[x_0, y_0] \Rightarrow f$ je spojitá v $[x_0, y_0]$,
   c) f je spojitá v $[x_0, y_0] \Rightarrow f$ existují $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.
   Platná tvrzení dokažte, k neplatným udejte protipříklad.
5. Určete rovnici tečné roviny ke grafu $f(x, y) = 2^{3x+4y}$ v bodě $[0, 0, 1]$.

6. Pomocí "A, ε, δ" definujte $\lim_{(x,y)\to(-\infty,1)} f(x,y) = 2$. Udejte příklad nekonstantní funkce, která splňuje tento vztah.
7. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}02}$.
8. Rozhodněte, zda existuje $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro níž $H'_x = y + \cos^2 x$, $H'_y = x + \operatorname{tg} y$. Pokud ano, určete ji.
9. Udejte příklad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, takové, že $u = (2, -1, 2)$ je normálový vektor k tečné rovině grafu v bodě $[1, 2, 3]$.
10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, $z = f(x^2 + y^2)$. Vypočtěte $xz'_y - yz'_x$.
11. Určete bod $[x_0, y_0, z_0]$ na grafu funkce $z = xy$, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $2x + 3y - z + 2 = 0$.
12. Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = x^{2y}$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $u = (1, 2)$.

IV. Implicitní funkce, extrémy.

1. Udejte příklad funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že rovností $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadána funkce $y = x^2$ a v okolí bodu $[0, 1]$ funkce $y = \mathrm{e}^x$.
2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $[x, y] \to [\frac{x}{y}, x^2 + y^2]$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1, 1]$ v němž je toto zobrazení prosté, pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $[1, 0]$.
3. Určete rovnici tečny a normály v bodě $[1, 1]$ ke křivce dané implicitně $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$.
4. Na křivce $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ najděte body, v nichž je tečna ke křivce vodorovná.
5. Rozhodněte, zda v okolí bodu $[1, 1]$ leží křivka daná rovnicí $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ nad tečnou resp. pod tečnou v tomto bodě.
6. Pomocí Taylorova mnohočlenu 2. stupně vypočtěte přibližně $\frac{4{,}02}{1{,}98}$.
7. Polynom $P(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy - x + 2y - 1$ napište v mocninách $(x - 1)$ a $(y + 1)$.
8. Rozhodněte, zda funkce $f(x,y) = \begin{cases} \sin xy, & [x,y] \neq [0,0] \\ \frac{1}{2}, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$ má v bodě $[0, 0]$ lokální extrém. Zdůvodněte.
9. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro níž $f'_x(1, -1) = 0 = f'_y(1, -1)$, ale v bodě $[1, -1]$ nenastává lokální extrém.
10. Pomocí vrstevnic funkce najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2$ na množině $M :\ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$.

Cvičná písemka I.

I. Část. (Každý příklad 1 bod)

1. Určete řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$, pro něž $y(1) = 1$.
2. Určete v jakém tvaru lze hledat partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = x^2 \mathrm{e}^{-x}$. Tento tvar napište s neurčitými koeficienty, které nepočítejte.
3. Určete lineární homogenní diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém řešení je $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$.

4. $P = C[-1,1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = -x^2$. Určete vzdálenost funkcí f, g v metrice $\rho_c(f,g) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$.
5. Definujte, kdy je množina $A \subseteq P$ v metrickém prostoru (P, ρ) kompaktní. Udejte příklad a) kompaktní, b) nekompaktní množiny A v Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^2$. Zdůvodněte.
6. Vypočtěte parciální derivace funkce $z = x^{y^2}$.
7. Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro níž existují parciální derivace $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, ale funkce f není v bodě $[0,0]$ spojitá.
8. Určete Taylorův mnohočlen 2. stupně funkce $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ v bodě $[x_0, y_0] = [1,1]$.
9. Určete rovnici tečny v bodě $[1,1]$ ke křivce $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$.
10. Pomocí vrstevnic maximalizované funkce určete absolutní maximum a minimum funkce $f(x,y) = x + y$ na množině $M : x^2 + y^2 \le 1$.

II. Část.

1. (4 body) Určete řešení diferenciální rovnice
$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2},$$
pro něž platí $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. (3 body) Rovnici $z''_{xx} + z''_{yy} - 2z''_{xy} = 0$ transformuje do proměnných $u = x + y$, $v = \frac{1}{x+y}$.
3. (3 body) Na elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ najděte body, které jsou nějblíže a nejdále k přímce $3x + y + 9 = 0$.

Cvičná písemka II.

I. Část. (Každý příklad 1 bod)

1. Určete řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{2y}{x} - 1$.
2. Určete singulární řešení Lagrangeovy rovnice $y = xy'^2 + \sqrt{y'}$.
3. Ve tvaru s neurčitými koeficienty (které *nepočítejte*) najděte partikulární řešení rovnice $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$
4. Definujte, co je hranice v metrickém prostoru a v metrickém prostoru $\mathbb{E}^1$ určete hranici množiny $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
5. Definujte, kdy je množina A v metrickém prostoru kompaktní a udejte nutnou a postačující podmínku, kdy je kompaktní podmnožina diskrétního metrického prostoru.
6. Rozhodněte, zda zobrazení $f : [0,1] \to [0,1]$ dané předpisem $f(x) = \sqrt{1+x}$ je kontrakce.

7. Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

8. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 2]$.
9. Rozhodněte, zda funkce definovaná implicitně v okolí bodu $[1, 1]$ předpisem $xy + y^3 - 2 = 0$ je v okolí tohoto bodu konvexní nebo konkávní.
10. Vypočtěte Jacobiho matici v bodě $[x_0, y_0] = [1, 1]$ zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daného předpisem

$$[x, y] \xmapsto{F} [x^2 + y^2, xy].$$

II. Část.

1. (4 body) Určete rovnici křivky jejíž normála v libovolném bodě křivky má následující vlastnost: Délka úsečky na ose x mezi počátkem a průsečíkem normály s osou x je rovna kvadrátu y-ové souřadnice bodu, v němž byla normála sestrojena.
2. (3 body) Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ určené implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 - xy - \sqrt{2}\,yz - 1 = 0$.
3. (3 body) Určete absolutní extrémy funkce $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ v trojúhelníku určeném body $A = [-1, 0], B = [1, 2], C = [3, 0]$.