COMPARACIÓN DE LOCALIZACIONES A TRAVÉS DE ADJUNCIONES

ORIOL RAVENTÓS

Resumen. Dada una adjunción entre dos categorías, establecemos condiciones que nos permiten comparar functores de localización definidos a ambos lados de la adjunción. Estos resultados se extienden al contexto de categorías de modelos, en términos de adjunciones de Quillen y localizaciones de Bousfield. Los resultados expuestos forman parte de un trabajo conjunto con C. Casacuberta y A. Tonks.

1. Localizaciones estrictas

Empezamos recordando las definiciones de par adjunto y localización. Un trato más extenso puede encontrarse en [2] y [10].

Definición 1.1. Dado un par de categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, un par de functores

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}' : G$$

define un *par adjunto* $F \dashv G$ si hay una biyección natural de conjuntos $\mathcal{C}'(FX, Y) \cong \mathcal{C}(X, GY)$ para todo X en $\mathcal{C}$ e Y en $\mathcal{C}'$.

Los morfismos correspondientes a las identidades id_{FX} e id_{GY} bajo una adjunción se llaman *unidad* $\eta_X \colon X \to GFX$ y *counidad* $\varepsilon_Y \colon FGY \to Y$.

Ejemplo 1.2. Dado un anillo con unidad R, tenemos un par adjunto

$$R \otimes \_ : \mathrm{Ab} \leftrightarrows R\text{-Mod} : U$$

entre la categoría de grupos abelianos Ab y la categoría de los R-módulos a izquierda R-Mod, donde U es el functor olvido, que envía cada R-módulo al grupo abeliano subyacente.

Definición 1.3. Una *localización* $L \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es la composición $L = G \circ F$ de un par adjunto $F \dashv G$ donde G es una inclusión de categorías. En este caso, la counidad es un isomorfismo y la unidad $\ell_X = \eta_X \colon X \to LX$ se llama *morfismo de localización* de X.

Un objeto X en $\mathcal{C}$ es *L-local* si ℓ_X es un isomorfismo y un morfismo g en $\mathcal{C}$ es una *L-equivalencia* si Lg es un isomorfismo. Se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad.

$$X \text{ es un objeto } L\text{-local} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}(g, X) \text{ es una biyección para toda } L\text{-equivalencia } g.$$

$$g \text{ es una } L\text{-equivalencia} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}(g, X) \text{ es una biyección para todo objeto } L\text{-local } X.$$

The author was supported by the project CZ.1.07/2.3.00/20.0003 of the Operational Programme Education for Competitiveness of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic.

Ejemplo 1.4. Dado un conjunto de morfismos S en una categoría localmente presentable $\mathcal{C}$, existe un functor de localización L_S tal que un objeto X es L_S-local si y sólo si $\mathcal{C}(g, X)$ es una biyección para todo $g \in S$. De hecho, bajo un axioma de grandes cardinales llamado Principio de Vopěnka, toda localización es de este tipo y en muchos casos puede tomarse S como un único morfismo, ver [1].

Teorema 1.5. *Dado un diagrama*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{C} \underset{F}{\overset{G}{\leftrightarrows}} \mathcal{C}' \xrightarrow{L'} \mathcal{C}'$$

donde L y L' son localizaciones y $F \dashv G$ define un par adjunto, tenemos que

(i) *G conserva objetos locales $\Leftrightarrow$ F conserva equivalencias,*
(ii) *F y G conservan objetos locales $\Leftrightarrow$ $FL \cong L'F$ y*
(iii) *F y G conservan equivalencias $\Leftrightarrow$ $LG \cong GL'$.*

Si $L = L_f$ y $L' = L_{Ff}$ para f un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces

(iv) *G conserva y refleja objetos locales y F conserva equivalencias,*
(v) *existe una Ff-equivalencia natural $\alpha\colon FL_f \Rightarrow L_{Ff}F$,*
(vi) *existe una transformación natural $\beta\colon L_fG \Rightarrow GL_{Ff}$ entre objetos f-locales y*
(vii) *G conserva equivalencias $\Leftrightarrow$ $L_fG \cong GL_{Ff}$.*

El siguiente corolario generaliza algunos resultados de [7] en el caso de la adjunción asociada a una mónada dada por la categoría de álgebras de Eilenberg-Moore.

Corolario 1.6. *Dada una mónada (T, λ, μ) sobre la categoría $\mathcal{C}$, tenemos un par adjunto*

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}^T : U$$

donde $\mathcal{C}^T$ es la categoría de álgebras de Eilenberg-Moore. Suponemos que la localización L_f existe para un morfismo f de $\mathcal{C}$.

(i) *F conserva f-equivalencias $\Leftrightarrow$ L_{Ff} existe y $L_fU \cong UL_{Ff}$.*
(ii) *Si T conserva f-equivalencias y L_{Ff} existe, entonces $L_fU \cong L_{Tf}U$ y $L_{Tf} \cong L_{TTf}$ $\Leftrightarrow$ T conserva Tf-equivalencias.*

Ejemplo 1.7. Dados un R-módulo M y un morfismo de grupos abelianos f, tenemos isomorfismos $L_fUM \cong UL_{R\otimes f}M \cong L_{U(R\otimes f)}UM$. En particular, las localizaciones conservan la estructura de módulo.

2. Localizaciones homotópicas

Empezamos recordando las definiciones de par de Quillen y localización homotópica de Bousfield. Para una introducción más detallada ver [9].

Definición 2.1. Un par adjunto

$$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{M}' : G$$

entre categorías de modelos se llama un *par de Quillen* si F conserva cofibraciones y cofibraciones triviales.

Los functores derivados de un par de Quillen $F \dashv G$ existen e inducen un par adjunto entre las categorías homotópicas. Es decir, después de invertir las equivalencias débiles tenemos una adjunción

$$\mathbb{F} : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{M}') : \mathbb{G}$$

donde $\mathbb{F}(X) = F(X^c)$ y $\mathbb{G}(Y) = G(Y^f)$.

Toda categoría de modelos admite un espacio de funciones $\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(-,-)$ de manera que $\pi_0(\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(-,-)) = \mathrm{Ho}(\mathcal{M})(-,-)$ y hay un equivalencia homotópica $\mathrm{map}_{\mathcal{M}'}(\mathbb{F}X, Y) \simeq \mathrm{map}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{G}Y)$ para todo X en $\mathcal{M}$ e Y en $\mathcal{M}'$.

Ejemplo 2.2. El grupoide fundamental y el nervio, $\pi : \mathrm{Space} \leftrightarrows \mathrm{Gpd} : N$, ver [5].

Ejemplo 2.3. La suspensión y el espacio de lazos, $\Sigma : \mathrm{Space}_* \leftrightarrows \mathrm{Space}_* : \Omega$, ver [8].

Ejemplo 2.4. El espectro suspensión de un espacio y el espacio de lazos infinito de un espectro, $\Sigma^\infty : \mathrm{Space}_* \leftrightarrows \mathrm{Spec} : \Omega^\infty$, ver [3].

Ejemplo 2.5. Dado un espectro anillo cofibrante E, $E \wedge \_ : \mathrm{Spec} \leftrightarrows E\text{-}\mathrm{Mod} : U$, ver [6].

Definición 2.6. Una *localización homotópica de Bousfield* en una categoría de modelos $\mathcal{M}$ es el functor de reemplazo fibrante en una nueva estructura de modelos $L\mathcal{M}$ sobre la misma categoría $\mathcal{M}$ con las mismas cofibraciones y, como mínimo, las mismas equivalencias débiles.

En estas condiciones, el par adjunto dado por las identidades

$$id : \mathcal{M} \leftrightarrows L\mathcal{M} : id$$

es un par de Quillen y el par adjunto derivado da lugar a una localización estricta en $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

Un objeto X en $\mathcal{M}$ es *L-local* si es fibrante en $L\mathcal{M}$ y un morfismo g en $\mathcal{M}$ es una *L-equivalencia* si Lg es una equivalencia débil. Se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad.

X es un objeto L-local $\Leftrightarrow$ X es fibrante en $\mathcal{M}$ y $\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(g, X)$ es una equivalencia homotópica para toda L-equivalencia g.

g es una L-equivalencia $\Leftrightarrow$ $\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(g, X)$ es una equivalencia homotópica para todo objeto L-local X.

Ejemplo 2.7. La localización respecto a una teoría de homología, donde las equivalencias débiles en la categoría localizada son los morfimos que inducen isomorfismo en homología.

Ejemplo 2.8. Si $\mathcal{M}$ es combinatoria y S es un conjunto de morfismos de $\mathcal{M}$, existe una localización homotópica $L_S\mathcal{M}$ en la que las equivalencias débiles son las S-equivalencias. De hecho, toda localización homotópica es de este tipo bajo ciertas hipótesis y en muchos casos puede tomarse S como un único morfismo, ver [4].

El Teorema 1.5 admite el siguiente análogo homtópico.

Teorema 2.9. *Dado un diagrama*

$$L\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{M} \underset{F}{\overset{G}{\leftrightarrows}} \mathcal{M}' \leftrightarrows L'\mathcal{M}'$$

donde L y L' son localizaciones homotópica de Bousfield y $F \dashv G$ define un par de Quillen, tenemos que

(i) $\mathbb{G}$ *conserva objetos locales* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}$ *conserva equivalencias,*
(ii) $\mathbb{F}$ *y* $\mathbb{G}$ *conservan objetos locales* $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}LX \simeq L'\mathbb{F}X$ *para todo* X *en* $\mathcal{M}$ *y*
(iii) $\mathbb{F}$ *y* $\mathbb{G}$ *conservan equivalencias* $\Leftrightarrow$ $L\mathbb{G}Y \simeq \mathbb{G}L'Y$ *para todo* Y *en* $\mathcal{M}'$.

Si $L = L_f$ *y* $L' = L_{\mathbb{F}f}$ *para* f *un morfismo en* $\mathcal{C}$*, entonces*

(iv) $\mathbb{G}$ *conserva y refleja objetos locales y* $\mathbb{F}$ *conserva equivalencias,*
(v) *para todo* X *en* $\mathcal{M}$ *existe una* $\mathbb{F}f$*-equivalencia* $\mathbb{F}L_fX \to L_{\mathbb{F}f}\mathbb{F}X$,
(vi) *para todo* Y *en* $\mathcal{M}'$ *existe un morfismo* $L_f\mathbb{G}Y \to \mathbb{G}L_{\mathbb{F}f}Y$ *entre objetos* f*-locales y*
(vii) $\mathbb{G}$ *conserva equivalencias* $\Leftrightarrow$ $L_f\mathbb{G}Y \simeq \mathbb{G}L_{\mathbb{F}f}Y$ *para todo* Y *en* $\mathcal{M}'$.

El Corolario 1.6, en cambio, no admite un análogo homotópico inmediato, ya que la localización de una T-álgebra, sólo tiene estructura de T-álgebra en la categoría homotópica. De todos modos, usando resultados de [6] podemos deducir las siguientes aplicaciones.

Ejemplo 2.10. Existe una πf-equivalencia $\pi L_fX \to L_{\pi f}(\pi X)$, ver [5].

Ejemplo 2.11. Existe una equivalencia débil $L_f\Omega X \simeq \Omega L_{\Sigma f}X$. En particular, las localizaciones homtópicas conservan espacios de lazos, ver [8].

Ejemplo 2.12. Existe una equivalencia débil $L_f\Omega^\infty X \simeq \Omega^\infty L_{\Sigma^\infty f}X$. En particular, las localizaciones homtópicas conservan espacios de lazos infinitos, ver [3].

Ejemplo 2.13. Dado E un espectro anillo cofibrante *conectivo*, es decir $\pi_i(E) = 0\ \forall i < 0$, existen equivalencias débiles $L_fUM \simeq UL_{E\wedge f}M \simeq L_{U(E\wedge f)}UM$. En particular, las localizaciones homotópicas conservan espectros módulo (sobre estos anillos espectro).

Referencias

[1] J. Adámek, J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[2] J. F. Adams, *Localisation and completion*, Lecture notes by Z. Fiedorowicz on a course given at the University of Chicago in Spring, 1973, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Ill., 1975.
[3] A. K. Bousfield, *K-localizations and K-equivalences of infinite loop spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 44 (1982), no. 2, 291–311.
[4] C. Casacuberta, B. Chorny, *The orthogonal subcategory problem in homotopy theory*, In: An Alpine Anthology of Homotopy Theory, Contemp. Math., vol. 399, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 41–53.
[5] C. Casacuberta, M. Golasiński, A. Tonks, *Homotopy localization of groupoids*, Forum Math. **18** (2006), no. 6, 967–982.
[6] C. Casacuberta, J. J. Gutiérrez, I. Moerdijk, R. M. Vogt, *Localization of algebras over coloured operads*, Proc. London Math. Soc. (3) 101 (2010), no. 1, 105–136.
[7] C. Casacuberta, J. L. Rodríguez, J.-Y. Tai, *Localizations of abelian Eilenberg-MacLane spaces of finite type*, preprint.
[8] E. Dror Farjoun, *Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization*, Lecture Notes in Math., vol. 1622, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
[9] P. S. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
[10] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

Masaryk University, Brno, República Checa
E-mail address: `raventos@mail.muni.cz`