MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Otakar Borůvka a diferenciální rovnice

Disertační práce

Petra Šarmanová

BRNO 1998

Obor: Obecné otázky matematiky a informatiky

Školitelka: Doc. RNDr. Zuzana Došlá, CSc.

Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta MU v Brně
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracovala samostatně a použila jen pramenů, jež uvádím v seznamu literatury.

V Ostravě 30. září 1998

Autorka by na tomto místě chtěla poděkovat všem, kteří jí jakýmkoliv způsobem pomohli při přípravě disertační práce. Zejména by chtěla poděkovat Doc. RNDr. Zuzaně Došlé, CSc. za cenné rady a pomoc při celém postgraduálním studiu a Doc. RNDr. Štefanu Schwabikovi, DrSc. za podnětné připomínky k disertační práci a pomoc při vyhledávání materiálů v archivu AV ČR v Praze.

Obsah

Cíle a obsah disertační práce

Významný český matematik Otakar Borůvka za svého života výrazně zasáhl do několika matematických disciplín – do matematické analýzy, teorie grafů, diferenciální geometrie, algebry a diferenciálních rovnic. Přitom nejdelší část svého života a nejvíce publikací věnoval poslední ze jmenovaných disciplín – diferenciálním rovnicím.

Tato disertační práce je věnována činnosti O. Borůvky v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Jejím cílem je zmapovat období, jež začíná rozhodnutím O. Borůvky věnovat se diferenciálním rovnicím (1943 – 1944) a končí vydáním německé monografie *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* [16][1] roku 1967, ukázat jeho pedagogickou a vědeckou činnost v této době a podat matematický výklad jeho transformační teorie.

Přínos O. Borůvky v uvedeném období lze shrnout do tří hlavních bodů:

1. Vytvoření ucelené teorie globálních transformací obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.
2. Založení semináře pro studium diferenciálních rovnic, jenž je v jisté formě činný dodnes.
3. Vliv na vědeckou činnost řady brněnských i mimobrněnských matematiků, z nichž mnozí jsou dnes světovými odborníky v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic.

Práce obsahuje pět hlavních částí, ty jsou dále členěny na kapitoly a odstavce. Cílem *Úvodní části* je stručně vyložit základní mezníky života a díla O. Borůvky a ukázat souvislosti, které vedly k rozhodnutí O. Borůvky věnovat se diferenciálním rovnicím.

Druhá část s názvem *Pedagogická činnost* podává přehled o pedagogické činnosti O. Borůvky do roku 1950. Největší pozornost je věnována přednáškové činnosti O. Borůvky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v období poválečném, obzvláště seminářům o diferenciálních rovnicích.

Třetí část, jež nese název *Teorie fází, dispersí a transformací*, má poněkud odlišný charakter než ostatní části práce. Jejím cílem je vyložit stručně zmíněnou teorii s důrazem na hlavní Borůvkovy výsledky zpracované v monografii [16]. Výklad je veden v dnes používaném matematickém stylu, tj. základní pojmy jsou uvedeny v definicích, základní výsledky ve větách. Nejdůležitější věty jsou dokázány, přičemž jejich důkaz je mnohdy odlišný od Borůvkova důkazu.

Čtvrtá část s názvem *Vědecká činnost* je věnována vědecké činnosti O. Borůvky v letech 1940 – 1966. Hlavní pozornost je zaměřena na vznik a činnost semináře pro studium diferenciálních rovnic. Jsou zde podrobně zaznamenána témata probíraná v tomto semináři, čímž je možno sledovat postupný vznik a vývoj Borůvkovy teorie globálních transformací a také vliv na ostatní matematiky a jejich vědeckou a publikační činnost. Tato část také zahrnuje podrobný přehled zahraničních cest a mezinárodních konferencí do roku 1966, na nichž O. Borůvka proslovil přednášku týkající se diferenciálních rovnic.

V páté části s názvem *Publikace a jejich charakteristika* je uveden seznam a charakteristika prací O. Borůvky, jež se týkají teorie fází, dispersí a transformací. Tato charakteristika vychází ze dvou základních zdrojů. V případě, že byla daná práce recenzována v *Mathematical Reviews* nebo v *Zentralblatt für Mathematik*, jsou uvedeny přesné citace těchto recenzí v jazyce, v němž byly recenze zveřejněny. V ostatních případech je uvedena stručná charakteristika česky. Kromě

[1]Odkaz na seznam prací O. Borůvky, jež se týkají teorie fází, dispersí a transformací, jak je uveden v V. části práce.

zmíněné charakteristiky publikací obsahuje tato část historicky zajímavé poznámky ke vzniku a osudu některých Borůvkových prací. Všimneme si zde recenze první Borůvkovy práce z teorie dispersí [1], jež vyšla v *Referativním Žurnálu* a následné reakce O. Borůvky na tuto recenzi v práci [2], nahlédneme do zákulisí vzniku a vydání monografie [16] a budeme se snažit odpovědět na otázku, proč nikdy nebyla vydána učebnice o diferenciálních rovnicích, na které O. Borůvka začal pracovat již ve čtyřicátých letech a znovu se pak k ní vrátil v letech šedesátých.

Následují přílohy a soupis literatury a archivních pramenů použitých ke zpracování práce. *Příloha 1* přináší přehledně zpracované údaje týkající se vzdělání a zaměstnání O. Borůvky, *Příloha 2* seznam profesorů a docentů matematiky na Masarykově univerzitě v letech 1920 – 1967 a *Příloha 3* soupisy disertačních prací z diferenciálních rovnic, jež vedly k udělení hodnosti doktora přírodních věd, hodnosti kandidáta věd a hodnosti doktora věd na brněnské univerzitě v rozmezí let 1920 – 1967. Použitá literatura je rozdělena na tři části. První z nich je uceleným přehledem publikací o O. Borůvkovi, druhá obsahuje použité materiály z archivu O. Borůvky[2], které byly stěžejním pramenem při zpracování práce, a třetí ostatní publikace a prameny.

V celé práci se budeme snažit o zařazení činnosti O. Borůvky do širších dobových souvislostí, zejména přiblížíme situaci na brněnské univerzitě po roce 1945 a složité organizační změny v padesátých letech.

K jazykovému stylu práce poznamenejme, že v celé práci kromě části III, jsou citované části dopisů a dokumentů uváděny italikou a je v nich zachován původní jazykový styl i gramatika. Nebyly v nich provedeny žádné jazykové korektury.

Práce vznikla během let 1994 – 1998 v rámci postgraduálního doktorandského studia na katedře matematiky Přírodovědecké fakulty MU v Brně. Některé výsledky této práce byly publikovány v roce 1997 v časopise *Archivum mathematicum* v příspěvku s názvem *From the recollections of Otakar Borůvka – the founder of the Brno school of differential equations*. Kromě toho bylo část výsledků práce prezentováno formou *panelu* na mezinárodní konferenci *Equadiff 9* v Brně roku 1997 a formou přednášky v semináři prof. J. Mawhina na *Universite Catholique de Louvain* v Louvain-la-Neuve v Belgii.

Předložená práce zachycuje vznik a vývoj Borůvkovy teorie globálních transformací v rámci činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic a v souvislosti s tím počátky tzv. brněnské školy diferenciálních rovnic. Tento vývoj je zachycen z pohledu matematiky v tehdejším Československu. Práce se nezabývá zařazením Borůvkovy teorie do tehdejší světové matematiky. Za jedno ze zajímavých témat pro další zpracování bude proto jistě považováno zhodnocení přínosu O. Borůvky z hlediska světové matematiky, případně zmapování odkazů na Borůvkovu teorii. Zmínku o této teorii lze například najít v knize W. T. Reid *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations* (Springer 1980), kde je stručně připomenuta monografie [16], nebo v knize L. Cesari *Asymptotic behavior and Stability problems in ordinary differential equations* (Springer 1959), kde je zmínka o Borůvkově práci [1] z roku 1953.

Dalším zajímavým tématem navazujícím na tuto disertační práci by mohlo být zmapování „stromu žáků a následovníků“ O. Borůvky, neboť mnoho z jeho přímých žáků se stalo světovými osobnostmi v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic, založili vlastní semináře a vychovali řadu dalších významných matematiků v tomto oboru. Jmenujme například M. Bartuška, J. Chrastinu, F. Neumana, M. Rába a J. Vosmanského z Brna, M. Greguše, V. Šedu a M. Švece z Bratislavy nebo M. Laitocha z Olomouce.

[2] Archiv je uložen v bývalé pracovně O. Borůvky v Brně na Janáčkově náměstí 2a.

I Úvodní část

1 Život a dílo O. Borůvky

Brněnský matematik Otakar Borůvka byl po dlouhá desetiletí jednou z vůdčích osobností matematického života nejen na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, ale v celém Československu. Byl vynikajícím reprezentantem české vědy v zahraničí a skvělým učitelem a organizátorem vědeckého života.

O. Borůvka se narodil 10. května 1899 v Uherském Ostrohu, kde byl jeho otec ředitelem obecné a měšťanské školy. Zde také vychodil obecnou školu a 1. třídu školy měšťanské. V září 1911 byl přijat do 2. třídy gymnázia v Uherském Hradišti, kde setrval až do prázdnin roku 1916, kdy ukončil 6. třídu. Pod tlakem událostí první světové války pak přešel do posledního ročníku vojenské vyšší reálky v Hranicích na Moravě a později, v roce 1917, do vojenské technické akademie v Mödlingu u Vídně, kde zůstal do konce první světové války v roce 1918. Na vojenské akademii přednášel matematiku prof. Hartmann z vídeňské techniky a později prof. Weitzenböck, který po válce působil na univerzitě v Amsterdamu. Od nich se O. Borůvka naučil prvním základům vyšší matematiky. V roce 1917 složil maturitu na německé I. státní reálce ve Vídni a brzy potom, začátkem roku 1918, doplňovací zkoušku na gymnáziu v Uherském Hradišti.

V listopadu 1918, již v nové Československé republice, vstoupil do 1. ročníku České vysoké školy technické v Brně jako posluchač stavebního inženýrství. Na této škole reprezentovali matematiku profesoři Matyáš Lerch a Jan Vojtěch, kteří střídavě přednášeli v prvním a druhém ročníku. V roce 1918, kdy O. Borůvka vstoupil na techniku, přišla v prvním ročníku řada na prof. Lercha a tato náhodná okolnost rozhodla o dalším životním zaměření O. Borůvky. Na tuto rozhodující životní etapu vzpomíná sám O. Borůvka. Citujme z [B16]: *Lerchovy přednášky byly pro mne pravým opakem všech jiných přednášek, jimž jsem dokonale rozuměl. Tak se stalo, že chtěje porozumět přednáškám Lerchovým, studoval jsem hlavně matematiku, která mne nakonec tak upoutala, že jsem jí věnoval celý život. Říkávám, že jsem se stal matematikem proto, že jsem ji neuměl. Vzpomínám si, že jsem při studiu Lerchových přednášek v II. ročníku samostatně odvodil vzorec*

$$\xi(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \qquad (s > 1)$$

ovšem dávno známý, který byl mým prvním matematickým „objevem“.

Zkoušky u prof. Lercha O. Borůvka složil vždy s výborným prospěchem a to zajisté přispělo k tomu, že když M. Lerch přešel v roce 1920 na Masarykovu univerzitu, nabídl O. Borůvkovi místo asistenta při matematickém ústavu Přírodovědecké fakulty MU[3]. Od prosince 1920 do září 1921 byl O. Borůvka, jako posluchač 3. ročníku techniky, asistentem u prof. Vladimíra Nováka při fyzikálním ústavu České vysoké školy technické v Brně a od září 1921 asistentem u M. Lercha. V letech 1920 – 1922 byl posluchačem techniky a současně mimořádným posluchačem Přírodovědecké fakulty MU. Původně zamýšlel ukončit studia na obou školách, avšak v posledních ročnících studia nestačil plnit všechny úkoly zadané na technice, především z rýsování, a tak se rozhodl ukončit státními zkouškami jenom studium univerzitní. Státní zkoušky z matematiky a fyziky složil v prosinci 1922. V červnu 1923 dosáhl doktorátu přírodních věd na Přírodovědecké

[3]Masarykova univerzita (MU) byla založena roku 1919 a matematický ústav byl na její přírodovědecké fakultě zřízen roku 1920.

fakultě MU na základě disertace *O pomyslných kořenech rovnice* $\Gamma(z) = a$, kteréžto téma mu předložil M. Lerch nedlouho před svou smrtí v roce 1922. V této práci vyšetřuje, jakých hodnot nabývá funkce gamma pro komplexní argument v okolí bodu $z = 0$, a výsledků využívá k nalezení komplexních kořenů rovnice $\Gamma(z) = a$.

Studium na školách technického směru způsobilo, že měl O. Borůvka vždy plné porozumění pro technické a jiné aplikace matematiky. Brzy po ukončení první světové války byl v souvislosti s elektrifikací jižní Moravy požádán, aby z matematického hlediska řešil otázku co nejúspornějšího provedení elektrovodné sítě. Tento úkol úspěšně rozřešil a našel – dnes bychom řekli – minimální kostru konečného ohodnoceného grafu. Své výsledky, které spadají do v té době ještě neexistující teorie grafů, uveřejnil v roce 1926 a zajistil si tak světovou prioritu v řešení základního typu dopravního problému. Podrobnosti o Borůvkově práci v teorii grafů lze nalézt v monografii P. Šišmy *Teorie grafů 1736 – 1963* (Dějiny matematiky, sv. 8, Prometheus, Praha 1997).

Na uprázdněné místo po prof. M. Lerchovi nastoupil v roce 1923 prof. Eduard Čech, tehdy mladý, průbojný a ambiciózní vědec pracující v oboru projektivní diferenciální geometrie. E. Čech byl pracovitý a nadšený matematik, který vnesl do brněnského matematického života vzruch. O. Borůvku, který se do té doby věnoval klasické analýze, přivedl ke studiu diferenciální geometrie. V ní pak O. Borůvka aktivně pracoval asi deset let. Na radu E. Čecha se věnoval zejména studiu metod pařížského matematika E. Cartana, které byly tehdy zcela nové, a stal se jedním z mála geometrů, kteří již v té době Cartanovy metody ovládali a užívali je ve svých pracích. Ve školních letech 1926/27 a 1929/30 studoval O. Borůvka přímo u E. Cartana v Paříži. Zde měl příležitost seznámit se s mnoha matematiky světového jména jako jsou J. Hadamard, M. Fréchet, H. Cartan, A. Weil nebo J. Douglas. Po studiích v Paříži strávil O. Borůvka další semestr v Hamburku u W. Blaschkeho, kde bylo tehdy významné středisko diferenciální geometrie. Působili zde také jiní vynikající odborníci jako prof. E. Artin, E. Kähler nebo H. Zassenhaus.

Ve svých nejvýznačnějších pojednáních z projektivní diferenciální geometrie, které vznikly v letech 1924 – 1935, O. Borůvka poprvé studoval analytické korespondence mezi dvěma projektivními rovinami a odvodil jejich vlastnosti invariantní vzhledem ke dvojicím transformací projektivní grupy. Vypracoval obecnou teorii normální křivosti plochy v n-rozměrném prostoru s konstantní křivostí a podal rozšíření Frenetových vzorců pro analytické křivky vícerozměrného parabolického hermitovského prostoru.

Ve svých pracích Borůvka používal převážně metod E. Cartana, které v té době byly naprosto nové, a tím přispěl k jejich rozšíření. S tím souvisí i to, že byl v roce 1952 zvolen v Paříži do čestného výboru složeného asi z padesáti světových matematiků, který převzal péči o vydání úplného vědeckého díla E. Cartana.

V souvislosti s pracemi z projektivní diferenciální geometrie ještě poznamenejme, že na Borůvkovy práce o analytických korespondencích navázala geometrická škola v Bologni a že S. Chern v práci o minimálních varietách vnořených do nadkoulí nazývá diferenciální rovnice těchto ploch „Frenetovy-Borůvkovy vzorce“.

Na základě svých prací z diferenciální geometrie se O. Borůvka roku 1928 habilitoval z matematiky na Přírodovědecké fakultě MU a v roce 1934 byl na této fakultě jmenován mimořádným profesorem matematiky. Tehdy byli na brněnské univerzitě jen tři profesoři matematiky. Kromě O. Borůvky a E. Čecha ještě Ladislav Seifert, který se staral o výuku geometrie a deskriptivní geometrie. Ostatní přednášky museli zajistit E. Čech a O. Borůvka. To je také jeden z důvodů, proč se O. Borůvka tehdy začal hlouběji zabývat moderní algebrou, v níž pak řadu let vědecky pracoval. Dalším nezanedbatelným důvodem hledání nové problematiky bylo, že diferenciální geometrie v té době zabíhala již do značných podrobností, a to O. Borůvku nelákalo.

Začal se zabývat analýzou pojmu grupy; zejména ho zajímala otázka, jak závisí vlastnosti grupy na jejích axiomech. Ukázal, že základní pojmy teorie grup (podgrupa, homomorfismus, kongruence) lze přenést i na obecnější algebraickou strukturu, tzv. grupoid. Ten vznikne, když vynecháme všechny axiomy kladené na grupovou operaci. Svou teorii grupoidů O. Borůvka vybudoval stupňovitě. Na nejnižším stupni prováděl úvahy s množinami bez jakékoliv algebraické struktury, na středním stupni úvahy specializoval na grupoidy a na nejvyšším je ještě dále specializoval na grupy. Přitom si na nejnižším stupni vybudoval teorii rozkladů na množině a v množině, kterou pak vydatně využil v teorii grupoidů a grup.

Teorie grupoidů byla důležitou etapou na cestě vedoucí od speciálních algebraických struktur (jako jsou grupy, okruhy, tělesa, vektorové prostory, svazy) k pojmu obecné nebo univerzální algebry. Ukázalo se, že základní pojmy teorie grupoidů je možno přenést až na tyto univerzální algebry a protože je grupoid struktura velmi jednoduchá, mají úvahy o grupoidech velkou cenu metodickou.

A tak O. Borůvka vytvořil na množinovém základě pojmový aparát obecné algebry, vybudoval teorii grupoidů, jako jeden z prvních studoval rozklady množin a položil základy teorie vědeckých klasifikací. Své výsledky z teorie grupoidů shrnul v monografii *Základy teorie grupoidů a grup*, která vyšla několikrát česky a byla vydána také německy (1960) a anglicky (1974). Z lineární algebry vydal O. Borůvka knihu *Základy teorie matic* (1971), v níž zejména poprvé knižně zpracoval výsledky českého matematika Eduarda Weyra, které jsou v úzkém vztahu s tzv. Jordanovým kanonickým tvarem matic. Více o pracích O. Borůvky z algebry i diferenciální geometrie lze nalézt v obsáhlém článku [A1] nebo v monografii [A43].

Německá okupace a druhá světová válka násilně přerušila příznivý vývoj matematiky v Brně ve třicátých letech. V roce 1939 byly vysoké školy uzavřeny a profesoři posláni na tzv. dovolenou s čekatelným. Nucené přestávky v pedagogické práci využil O. Borůvka k tomu, že v knižní formě zformuloval své hlavní výsledky z teorie grupoidů.

Po ukončení druhé světové války byl O. Borůvka jmenován, s platností od roku 1940, řádným profesorem matematiky na Přírodovědecké fakultě MU.

V prvních několika letech po válce přednášel nejenom na Přírodovědecké fakultě MU, ale i na Pedagogické fakultě MU, na brněnské technice a také na Přírodovědecké fakultě Komenského univerzity v Bratislavě. V Bratislavě vypomáhal s výukou až do roku 1958, celkem 23 semestrů. Setkal se zde s mnoha nadanými a pilnými žáky, kteří se později stali vedoucími osobnostmi matematiky na Slovensku.

V padesátých letech se O. Borůvka začal cílevědomě věnovat studiu diferenciálních rovnic, disciplíně v té době v Československu málo pěstované. Ve školním roce 1946/47 začal vést seminář pro studium diferenciálních rovnic, jehož činnost se počátkem padesátých let zaměřila na studium globálních vlastností lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu, speciálně na rovnice řádu druhého. Výsledkem je kvalitativní teorie globálního charakteru, vyznačující se vysokým stupněm geometrizace a algebraizace. Základní principy a výsledky této moderní teorie shrnul O. Borůvka v monografii *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* [16], která vyšla v roce 1967 německy a roce 1971 anglicky. Řada českých i zahraničních matematiků využívá dodnes výsledků a metod této teorie k řešení problémů týkajících se nejen rovnic druhého řádu, ale i řádů vyšších.

Poznamenejme ještě, že v roce 1953 byl O. Borůvka zvolen členem korespondentem a v roce

1965 řádným členem ČSAV[4]. Významně se zasloužil o založení nového brněnského matematického časopisu *Archivum mathematicum* v roce 1965 a o založení Matematického ústavu ČSAV v Brně v roce 1969, kde také od tohoto roku až do své smrti 22. července 1995 pracoval. Přehledná data o dosaženém vzdělání a zaměstnání O. Borůvky jsou uvedena v *Příloze 1.*

Během své vědecké i učitelské činnosti vychoval O. Borůvka řadu vědecky aktivních matematiků. Lze říci, že většina matematiků působících na vysokých školách na Moravě i na Slovensku jsou jeho žáci nebo žáci jeho žáků.

Životu a dílu tohoto brněnského matematika byla věnována řada drobnějších i obsáhlejších článků, které vycházely k významným příležitostem a jeho životním jubileím. Jejich seznam je uveden v části *Literatura*, oddíl A. Významnější prací o životě O. Borůvky je rozsáhlá monografie *Otakar Borůvka* [A43] z roku 1996, jež byla vytvořena na základě osobního vypravování O. Borůvky zaznamenaného na magnetofonové pásky při příležitosti jeho 90. narozenin.

Ukončeme tento stručný průřez životem O. Borůvky citací z jednoho z posledních rozhovorů s tímto matematikem, jež byl ještě ve svých 96-ti letech duševně svěží a plný zájmu o matematické dění:

Letos v květnu jsem oslavil své šestadevadesáté narozeniny, což je hodně, ale ne nejvíc, a já nechci, aby moje vzpomínání vyznívalo jako nějaký nekrolog nad léty minulými, nad jedním z životů kteréhokoliv z nás. A možná právě proto, že nikdo z nás neví, který den bude jeho dnem posledním, jsem se snažil vědomě a podle svých sil v každém z nich naplno žít a pracovat. Tak jako žili moji učitelé – Matyáš Lerch, Ladislav Seifert a Eduard Čech. Dali mi mnoho, a tak i já cítím povinnost co nejvíc z toho předat mladé nadané generaci. Oni vždycky stranili nadaným a pilným, to bylo jejich a posléze i moje krédo: na koně vás posadím, ale jet musíte sami! [A43]

2 O. Borůvka a diferenciální rovnice

Z předchozí kapitoly víme, že se O. Borůvka v padesátých letech začal cílevědomě věnovat studiu diferenciálních rovnic a toto téma neopustil až do konce svého života.

Vzniku každé teorie však vždy předchází období přípravné práce a systematického studia dané problematiky. Nejinak tomu bylo v případě Borůvkovy teorie globálních transformací diferenciálních rovnic 2. řádu, jež byla souhrnně vyložena roku 1967 v monografii *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* [16]. Přípravné práce k vytvoření této teorie O. Borůvka započal již ve čtyřicátých letech. V následujícím odstavci se pokusme ukázat souvislosti, za kterých došel O. Borůvka k rozhodnutí věnovat se v budoucích letech diferenciálním rovnicím.

Rozhodnutí věnovat se diferenciálním rovnicím

Ke konci druhé světové války se začínaly vést diskuse o budoucích potřebách naší matematiky se zřetelem k výchově studentů a k rozvoji vědecké a technické práce. Do těchto diskusí se zapojil také O. Borůvka, který celou situaci probíral především s profesorem Františkem Vyčichlem z Prahy. A z těchto rozhovorů s F. Vyčichlem vzešlo rozhodnutí O. Borůvky věnovat se v budoucích letech aktivní práci v oboru diferenciálních rovnic.

[4] Československá akademie věd (ČSAV); dnes Akademie věd České republiky (AV ČR).

A jak na toto období vzpomíná sám O. Borůvka? Citujme ze vzpomínek, jež s O. Borůvkou natočil u příležitosti jeho 90. narozenin dr. Halama z oddělení nových dějin Moravského muzea v Brně. Vzpomínky jsou zapsány i s vypravěčským koloritem, jak je zaznamenal magnetofonový pásek:

Již v roce 1944, kdy už bylo jasné, že válka brzy skončí a že vítězství spojenců je jisté, bylo třeba, a to mě dost zabývalo, uvažovat o, abych uvažoval o své budoucí činnosti konkrétně, to jest jednak o své činnosti pedagogické a ovšem také vědecké.

Pokud jde o činnost pedagogickou, bylo třeba, aby studenti, kteří začali studovat před válkou, mohli ukončit svá studia, nově příchozí aby mohli začít studovat ... Bylo třeba zařídit přednášky tak, aby se všem těmto studentům vyhovělo.

V tomto směru jsem si nedělal žádné starosti ... spíše mi vrtalo hlavou jaký trend, pokud jde o vědeckou práci, jest třeba zahájit. Tehdy vědecká práce nebyla žádným způsobem řízena a odpovědnost za svou činnost nesli profesoři každý osobně a zde jsem neměl dobrý přehled o tom, jak to vcelku u nás vypadá a v jakém směru by měla vědecká práce v matematice u nás pokračovat.

Rozjel jsem se do Prahy, to bylo koncem roku 1944, abych se poradil se svými kolegy. Mluvil jsem zejména s Františkem Vyčichlem, kterého jsem si velmi vážil. Věc jsme velmi dokonale probrali a přišli jsme zejména k tomu, že je naprosto nutné, aby se u nás začali pěstovat, rozvíjet, teorie diferenciálních rovnic, která jest po stránce aplikací nesmírně důležitá a která u nás před válkou byla dost zanedbávána a v podstatě nebyla vůbec rozvíjena.

...

A protože nebylo nikoho, neviděli jsme nikoho, kdo by se této práce ujal, tak jsem prohlásil, že se toho ujmu sám, ačkoliv to nebylo lehké rozhodnutí, poněvadž to znamenalo znovu změnit obor svého, své vědecké práce.

Připomeňme, že O. Borůvka poprvé změnil téma své vědecké práce, když přešel od analýzy, od studia Lerchových prací, k diferenciální geometrii. Po úspěšném exkurzu do oblasti teorie grafů se v pozdějších letech přeorientoval na algebru. A nyní ho čekala problematika diferenciálních rovnic.

No ale dal jsem se s chutí do práce a brzy jsem našel problém, a myslím že to byl největší úspěch, který jsem jaksi aspoň v tomto oboru dosáhl, že jsem našel problém široký a velmi, velmi nadějný a užitečný.

Název tohoto problému byl *Studium globálních vlastností lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu*.

Velmi brzy jsem poznal, že jde o úkol nesmírně obtížný, dlouhodobý, který bych sám, vlastními silami v dohledné době nemohl zvládnout. Problém byl v tom, ten hlavní problém a nesnáz byla v tom, že zde se vyskytovaly otázky naprosto nové, pro něž nebylo žádných vzorů, nebyly známy základní pojmy, neřkuli nějaké metody, které by umožňovaly nějaké soustavné studium a podobně. A proto jsem přišel, že řešení tohoto problému jest možné jenom tím, že se v prvním období získají nějaké zkušenosti v těch nejjednodušších případech a teprve v druhém období na základě nalezených pojmů a získaných zkušeností se přikročí k rozšíření těch výsledků na nejobecnější případ. Tak jsem to také učinil.

A tak O. Borůvka začal se studiem diferenciálních rovnic 2. řádu, neboť ty jsou nejjednodušším případem diferenciálních rovnic n-tého řádu. Tenkrát ovšem nebylo vůbec jisté, zda se rovnice vyšších řádů nebudou chovat jinak, než by se dalo očekávat z toho, co se získá studiem rovnic řádu druhého. Nebylo zřejmé ani to, zda v budoucnu vybudovaná obecná teorie pro rovnice n-tého řádu nepohltí teorii rovnic řádu druhého coby svůj nezajímavý speciální případ. O. Borůvka věděl o všech těchto úskalích, nicméně do práce se pustil s velkým elánem.

Těžce jsem se probíjel ze začátku, ale nakonec úspěšně jsem získal řadu výborných spolupracovníků, rozdával jsem jim prostě témata, která se mně během mé práce vyskytla, přidali se studenti, kteří pracovali prostě na doktorských disertacích, a tak se stalo, že do patnácti let vyšla moje monografie, nejprve německy ....

Uvedené vzpomínky časově ohraničují období, jemuž se budeme věnovat v této práci. Shrňme nyní v bodech nejdůležitější události tohoto období:

1943 – 1944 Z diskusí s F. Vyčichlem vzešlo rozhodnutí O. Borůvky věnovat se v budoucích letech problematice diferenciálních rovnic. V této době začíná také O. Borůvka pracovat na učebnici z diferenciálních rovnic, která se však svého vydání nikdy nedočkala.

1945 V prvních poválečných letech se O. Borůvka věnoval především činnosti pedagogické. Přednášel nejenom na Přírodovědecké fakultě MU, ale i na Pedagogické fakultě MU, na technice v Brně a pravidelně dojížděl přednášet na univerzitu do Bratislavy.

1946/47 O. Borůvka začal vést matematický seminář pro studenty věnovaný problematice diferenciálních rovnic, který se stal počátkem pozdějšího „vědeckého“ semináře pro studium diferenciálních rovnic. V prvních letech byly v semináři studovány problémy existence a jednoznačnosti, metoda postupných aproximací a chování řešení v okolí singulárního bodu. Později, od roku 1951, se soustředila práce semináře na lineární diferenciální rovnice druhého a vyšších řádů. Tuto práci O. Borůvka zahájil tím, že přednesl referát o své nové teorii dispersí a vyslovil řadu problémů, které se týkaly pojmů, jež zde zavedl. Jeho spolupracovníci se pak snažili metody, kterými O. Borůvka studoval lineární diferenciální rovnici 2. řádu, přenést i na rovnice vyšších řádů. Tím postupně připravovali půdu k vytvoření teorie, která by popsala chování řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

1953 Byla vydána první publikace O. Borůvky věnovaná problematice dispersí. Do roku 1960 vyšly další 3 práce věnované nové teorii dispersí a transformací, v roce 1970 to již bylo 24 prací a celkem O. Borůvka této problematice věnoval 39 vědeckých publikací.

1953 O. Borůvka poprvé přednášel o své nové teorii v zahraničí – na 8. sjezdu polských matematiků ve Varšavě. Do roku 1966 vykonal O. Borůvka dalších 19 zahraničních cest, z nichž většina byla věnována jeho nové teorii transformací. Významné místo mezi nimi zaujímá první mezinárodní konference o diferenciálních rovnicích Equadiff v roce 1962, kterou O. Borůvka zahájil přednáškou s názvem *Transformace diferenciálních lineárních rovnic obyčejných druhého řádu* a byl následován referáty mnoha svých žáků, členů semináře.

1967 V tomto roce byla vydána Borůvkova německá monografie *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* [16], jež shrnuje všechny dosavadní výsledky z teorie fází, dispersí a transformací.

II Pedagogická činnost

První kapitola této části je věnována přednáškové činnosti O. Borůvky od roku 1928, kdy se stal soukromým docentem na Přírodovědecké fakultě MU, do roku 1940.

V druhé kapitole si všimneme pedagogické činnosti O. Borůvky v letech 1945 – 1950. Podrobně se zaměříme především na matematický seminář, v němž byly probírány vybrané kapitoly z teorie diferenciálních rovnic. Jak uvidíme později, tento seminář lze považovat za počátek činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic, jemuž se budeme podrobně věnovat ve IV. části práce.

1 Přednášková činnost O. Borůvky do roku 1940

V červenci roku 1927 se O. Borůvka vrátil ze svého prvního ročního pobytu u prof. E. Cartana v Paříži zpět do Brna. Povzbuzen bohatými matematickými zkušenostmi a znalostmi, jež si s sebou přivážel z Paříže, si ještě téhož roku podal žádost o habilitaci z matematiky na Přírodovědecké fakultě MU. Jako habilitační práci předložil svou studii o analytických korespondencích. Poznamenejme, že podmínkou pro úspěšné splnění habilitačního řízení bylo nejen předložení habilitační práce, ale dále habilitační zkouška před profesorským sborem a habilitační přednáška. Nakonec bylo vše podmíněno schválením ministerstva školství. Úspěšná habilitace O. Borůvky byla potvrzena v květnu 1928. Od té doby se stal soukromým docentem na Přírodovědecké fakultě MU, měl tedy právo vypisovat a konat přednášky. Žádné finanční výhody však z toho neplynuly, nadále zůstával zaměstnán jako asistent.

A nastaly nové starosti – docentské starosti, s docentskými přednáškami. Dodnes si pamatuji, jak jsem váhal nad tématem první přednášky a nakonec, opět po poradě s profesorem Čechem, jsem zvolil přednášku z teorie čísel. Byl to sice obor, který jsem nikdy speciálně nerozpracovával, ale je to téma ne nedůležité a nezajímavé. [A43]

Následující tabulka udává přehled přednáškové činnosti O. Borůvky od zmíněného roku 1928 do roku 1940. Pozdějším obdobím se budeme zabývat v další kapitole. Podkladem pro následující tabulku se staly seznamy přednášek Přírodovědecké fakulty MU v jednotlivých letech.

Rok (semestr)	Název přednášky, semináře (počet hodin týdně)
1928/29 (Z)	– Úvod do teorie čísel (2) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu (5)
1928/29 (L)	– Teorie čísel (2) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu (5)
1929/30 (Z)	
1929/30 (L)	
1930/31 (Z)	– Nekonečné řady (2) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu (5)
1930/31 (L)	– Determinanty (3)

Rok (semestr)	Název přednášky, semináře (počet hodin týdně)
1931/32 (Z)	– Numerické řešení algebraických rovnic (3) – Integrální počet (2) – Proseminář (2)
1931/32 (L)	– Irracionální čísla (1) – Integrální počet (4) – Proseminář (2)
1932/33 (Z)	– Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2) – Nekonečné řady (5) – Proseminář (2)
1932/33 (L)	– Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2) – Diferenciální rovnice (5) – Matematický proseminář (2)
1933/34 (Z)	– Integrální počet (5) – Matematický proseminář (2)
1933/34 (L)	– Integrální počet (5) – Matematický proseminář (2)
1934/35 (Z)	– Lineární substituce a bilineární formy (5) – Matematický proseminář (2)
1934/35 (L)	– Nekonečné řady (2) – Diferenciální rovnice (3) – Matematický proseminář (2)
1935/36 (Z)	– Integrální počet (5) – Matematický proseminář (odděl. algebraické) (2) – Matematický proseminář (odděl. geometrické) (2)
1935/36 (L)	– Analytické funkce (5) – Matematický proseminář (2)
1936/37 (Z)	– Diferenciální rovnice (5) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu (2) – Matematický proseminář (2)
1936/37 (L)	– Diferenciální rovnice (5) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2) – Matematický proseminář (2)
1937/38 (Z)	– Algebra (4) – Integrální počet (2) – Matematický proseminář (2)
1937/38 (L)	– Integrální počet (5) – Matematický proseminář (2)
1938/39 (Z)	– Grupy (5) – Matematický proseminář (2)
1938/39 (L)	– Grupy (5) – Matematický proseminář (2)
1939/40 (Z)	– Integrální počet (3) – Diferenciální rovnice (2) – Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2)

Důvodem přerušení přednášek ve školním roce 1929/30 byl druhý studijní pobyt O. Borůvky v Paříži u prof. E. Cartana na základě Rockefellerova stipendia. Ihned po ukončení tohoto pobytu požádal O. Borůvka Rockefellerovu nadaci o další stipendium na studium v Německu. Toto stipendium získal, a tak v říjnu 1930 odejel přímo z Paříže do Hamburku, kde strávil u prof. W. Blaschkeho další semestr. Zřejmě tento pobyt nebyl dopředu naplánován, neboť v seznamu přednášek má O. Borůvka na zimní semestr 1930/31 vypsány řádné přednášky.

Již koncem roku 1929 byl O. Borůvka navržen na místo mimořádného profesora na Přírodovědecké fakultě MU. Poznamenejme, že mimořádný profesor byl profesor, který byl ve statutu úředníků veden jako mladší – měl plat, ale protože byl mladý, nemohl vykonávat všechny funkce, nemohl být například promotorem. Byly to tedy věci spíše formální a praxe byla taková, že po třech letech bývali tito „mimořádní" jmenováni profesory řádnými. Z důvodu hospodářské krize, která vedla až k návrhu na zrušení Přírodovědecké fakulty MU, bylo jednání o profesorském místě O. Borůvky pozdrženo. Nakonec byl O. Borůvka jmenován mimořádným profesorem na Přírodovědecké fakultě MU od 1. září 1934.

O situaci na ústavu matematiky se dovídáme z „Návrhu na jmenování O. Borůvky mimořádným profesorem matematiky", jenž byl sepsán E. Čechem, L. Seifertem a B. Hostinským 30. 11. 1929. (Osobní spis O. Borůvky – archiv AV ČR):

Od počátku fakulty počítalo se se zřízením čtyř stolic pro matematické vědy. Avšak pro nedostatek vhodných kandidátů byly zatím zřízeny pouze stolice dvě: jedna pro mat. analysu (prof. Lerch a po jeho smrti prof. Čech), jedna pro geometrii a deskriptivní geometrii (prof. Seifert). Na tomto zcela neutěšeném stavu změnilo se za 10 let trvání fakulty pouze tolik, že v roce 1924 zřízena byla dvouhodinová (od roku 1928 tříhodinová) úvodní přednáška z diferenciálního a integrálního počtu, a že v roce 1928 habilitovali se z matematiky dva soukromí docenti: pan PHDr. Josef Kaucký a RNDr. Otakar Borůvka.

I kdyby úkolem profesorů přírodovědecké fakulty byla pouze příprava kandidátů ke státní zkoušce pro učitelství na středních školách, nemohlo by dosavadní obsazení nikterak postačiti. Prof. Čech je dnes nucen valnou většinu své učitelské činnosti věnovati mat. analyse, jež je disciplinou daleko nejdůležitější, zejména se zřetelem na aplikace matematiky v jiných vědách. Avšak středoškolský profesor může ve škole věnovati mat. analyse nejvýše několik hodin v poslední třídě; naproti tomu je pro něj zcela nezbytná důkladná znalost algebry, která spolu s geometrií tvoří jeho vlastní učební úkol na střední škole. Je tedy naléhavá potřeba, aby algebře bylo na universitě věnováno mnohem více času, než je to možné, při dnešním obsazení.

Podrobněji je o profesorském sboru na ústavu matematiky v letech 1920 – 1940 pojednáno v *Příloze 2.*

V polovině třicátých let se O. Borůvka v souvislosti s celkovou situací na ústavu matematiky začal orientovat na moderní algebru.

V pedagogické činnosti jsem ovšem musel dávat přednost potřebám studentů. Snažil jsem se tedy přednášet především o věcech, které studenti potřebovali pro státní zkoušky. A také v zájmu jejich dalšího uplatnění, většinou jako středoškolských profesorů.

A protože, jak jsem sám poznal, na středních školách bylo třeba mít velmi široký rozhled, úmyslně jsem střídal přednášky z nejrůznějších matematických oborů. Především to byl diferenciální a integrální počet, což je základ matematické analýzy, dále diferenciální rovnice, integrální rovnice, nekonečné řady ..., a tyto přednášky jsem opakoval, ovšem nikdy ve stejném znění. [A43]

Ve studijním roce 1938/39 se na univerzitě začal projevovat neklid ze zvýšené útočnosti nacistického Německa. Přesto provoz na univerzitě pokračoval i v letním semestru kupodivu běžným způsobem, bez vážnějších zásahů německých úřadů. Situace se však vyhrotila na podzim 1939, obzvláště po pražské demonstraci 28. října, kde bylo mnoho demonstrantů zraněno a zatčeno. Po pohřbu Jana Opletala, studenta medicíny, jenž zraněním z demonstrace podlehl, došlo ke srocení českého studenstva a ke srážkám s německou policií. Toho využily německé orgány k drastickému útoku proti celému českému vysokému školství. Ačkoliv v Brně nedošlo k žádným demonstracím, byly 17. listopadu obsazeny všechny studentské koleje, vysoké školy a uzavřeny vědecké knihovny. Univerzitní profesoři byli posláni na tzv. dovolenou s čekatelným, což byla nucená dovolená s mírně sníženým platem.

O. Borůvka byl dán na dovolenou s čekatelným 1. 8. 1940. Během okupace nebyl nikde zaměstnán, soukromě se věnoval své teorii grupoidů a grup. Za prvního stanného práva byl gestapem z politických důvodů vězněn a vyslýchán (od 17. 12. 1941 do 8. 1. 1942).

2 Přednášková činnost O. Borůvky v letech 1945 – 1950

Jaro 1945 přineslo dlouho očekávané osvobození. Ihned v prvních svobodných dnech začali učitelé, studenti i ostatní zaměstnanci pracovat na znovuvybudování vysokých škol. Přestože situace nebyla snadná, neboť většina budov byla poničena, bylo zničené nebo vykradené vybavení škol i knihoven, do června se podařilo obnovit chod všech čtyř fakult univerzity.

Mnohem bolestnější než materiální ztráty však byly ztráty na životech studentů a učitelů. Na Přírodovědecké fakultě MU, která ztratila za války osm profesorů, zbývalo jedenáct řádných profesorů a čtyři mimořádní. Z toho byli tři profesoři matematiky: L. Seifert, E. Čech a O. Borůvka. K 1. říjnu 1945 byli jmenováni další dva mimořádní profesoři matematiky, a to Vladimír Knichal a Josef Novák. Již v roce 1946 došlo k oslabení odchodem E. Čecha do Prahy.

Struktura pracovišť zůstala v prvních poválečných letech stejná jako před válkou. Pro matematiku to znamenalo existenci tzv. Ústavu a semináře pro matematiku, v jehož čele stál nejprve E. Čech a po jeho odchodu L. Seifert. Změny přineslo až období let 1950 – 1951, kdy došlo ke zrušení ústavů a vzniku kateder.

Bezprostředně po osvobození bylo hlavním úkolem vytvořit na vysokých školách základní podmínky pro zahájení výuky. Bylo mnoho studentů, kteří začínali studovat, i mnoho těch, jež chtěli svá studia dokončit. Proto v prvních poválečných letech byla činnost na vysokých školách upřena převážně k práci pedagogické. U profesorů a docentů byly běžné úvazky dvaceti týdenních přednáškových hodin, současně na několika fakultách nebo vysokých školách. Ani O. Borůvka nebyl výjimkou. Přednášel v té době nejen na Přírodovědecké fakultě MU, ale také na Pedagogické fakultě MU, na technice v Brně a na Komenského univerzitě v Bratislavě. Dále se však budeme věnovat hlavně pedagogickému působení O. Borůvky na Přírodovědecké fakultě MU v Brně.

O. Borůvka nastoupil zpět na Přírodovědeckou fakultu MU 5. 5. 1945 a ihned se aktivně zapojil do přípravy následujícího studijního roku. V roce 1946 byl O. Borůvka jmenován řádným profesorem Masarykovy univerzity s platností k 1. 5. 1940. Protože E. Čech odešel po válce do Prahy, aby se zúčastnil organizace vědeckého života, připadl O. Borůvkovi úkol zajistit na univerzitě přednášky z analýzy a algebry.

Pedagogická činnost O. Borůvky byla vždy promyšlená do nejmenších podrobností. Přednášky byly zaměřovány k moderním partiím matematiky a jejich přesná formulace nikdy nebyla na újmu srozumitelnosti. Jak píše jeho žák Miroslav Novotný v článku [A14], zápisy z přednášek O. Borůvky mohly studentům sloužit jako skripta. Zdůrazněme, že i přes veliké pedagogické úvazky, obzvláště v prvních poválečných letech, se O. Borůvka zaměřoval také na činnost vědeckou. A možná právě to mu umožňovalo obohacovat své přednášky a vysvětlovat látku v širších souvislostech. Citujme z vlastních vzpomínek O. Borůvky, jak jsou zaznamenány v [B17]:

Pokud to mohu posoudit, neměl jsem nikdy nouzi o posluchače a dokonce jsem se po mnoha letech o jednom bývalém žáku dozvěděl, že ten někde prohlásil: „Na Borůvkovy přednášky půjdu, i když budou o půlnoci.“ Takže z toho vyvozuji závěr, že je třeba anebo je alespoň užitečné, aby se učitelé na vysokých školách pokud možno intenzívně věnovali vlastní práci. Je totiž velký rozdíl, jestli nějakou věc znám z literatury, jestli jsem se jí naučil, či jestli ji znám z vlastního prožití. Člověk opravdu prožívá tyto věci, o nichž potom může mluvit volněji nebo otevřeněji v přednáškách, než když je zná jen z literatury. Jinak přednášky nepředstavovaly pro mne problém, vždyť ta látka na vysoké škole je z hlediska matematiky celkem běžná, uveďme třeba integrální nebo diferenciální počet, kde se musí probrat určité základy; to jsou věci tak běžné jako denní chléb. Ale jde o to, jak poznatky podat, to je ta základní otázka. Řekl jsem, že má-li člověk svoje vlastní zkušenosti a pohledy na věc, dá se všechno vyjádřit jinak než když to čtu ze skript, nebo tu a tu kapitolu z učebnice. Samozřejmě jsem pedagogické práci vyhradil čas, který byl nutný pro přednášky a cvičení, pamatoval jsem i na rozmluvy se studenty, ale všechen ostatní čas šel na vědeckou práci.

O. Borůvka vždy věnoval zvláštní péči výchově budoucích vědeckých pracovníků. Mnohem dříve, než byly zavedeny aspirantury, vychovával budoucí matematiky metodami, které se nijak nelišily od aspirantského školení. Vždy se také snažil vést studenty k aplikacím teoretických výsledků. Věděl však, že cesta od matematiky k technické praxi vede většinou přes matematickou analýzu, zejména její klasické partie. Zájem tehdejší mladé brněnské generace byl však upřen k moderním partiím algebry a analýzy. Bylo zde reálné nebezpečí, že mladí matematikové budou klasickou analýzu podceňovat. O. Borůvka proto ihned po válce založil seminář pro studium díla M. Lercha. Podrobným studiem prací tohoto klasika se účastníci semináře naučili oceňovat půvaby klasické analýzy, zejména důmyslnost jejích početních postupů často dovedených až k numerickému vyjádření výsledku.

V následující tabulce jsou uvedeny názvy přednášek a seminářů včetně počtu vyučovaných hodin týdně, jež O. Borůvka konal v rozmezí let 1945 – 1949 na Přírodovědecké fakultě MU.

Rok (semestr)	Název přednášky, semináře (počet hodin týdně)
1945/46 (Z)	– Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2) – Diferenciální rovnice (5) – Matematický proseminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)

Rok (semestr)	Název přednášky, semináře (počet hodin týdně)
1945/46 (L)	– Úvod do diferenciálního a integrálního počtu II (2) – Diferenciální rovnice (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)
1946/47 (Z)	– Matice (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)
1946/47 (L)	– Algebra (2) – Nekonečné řady (3) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)
1947/48 (Z)	– Diferenciální rovnice (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)
1947/48 (L)	– Diferenciální rovnice (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2) – Seminář pro studium díla M. Lercha (2)
1948/49 (Z)	– Diferenciální rovnice vyšších řádů (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2)
1948/49 (L)	– Diferenciální rovnice vyšších řádů (5) – Matematický proseminář (2) – Matematický seminář (2)

Z tabulky vidíme, že kromě přednášek vedl O. Borůvka matematický seminář, matematický proseminář a seminář pro studium díla M. Lercha.

V matematickém prosemináři byla ve školních letech 1945/46 a 1947/48 probírána dělitelnost polynomů a numerické řešení algebraických rovnic a ve školních letech 1946/47 a 1948/49 teorie determinantů. V prvních poválečných semestrech se prosemináře zúčastňovalo až 130 posluchačů, postupně se jejich počet ustálil na třiceti až čtyřiceti.

V semináři pro studium díla M. Lercha byly systematicky studovány Lerchovy práce. Poznamenejme, že seminář byl činný šest semestrů od roku 1945 do roku 1948 a později v roce 1952 byl v jiné formě v rámci činnosti Ústředního ústavu matematického znovu obnoven. Činnost semináře byla ukončena vydáním obsažné publikace s názvem *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy* (Práce Brněnské základny ČSAV, XXIX (1957), 417–540). Pro zajímavost citujme z tzv. Vyhlášky o tomto semináři, jež byla byla 4. srpna 1945 sepsána O. Borůvkou:

Každý účastník bude povinen podrobně prostudovati některou Lerchovu práci, referovati o ní *v semináři a napsati stručný referát. Tyto referáty budou podkladem pro konečné zhodnocení Lerchova díla, které bude patrně ukončeno teprve po několika letech. Přístup do semináře mají posluchači ve 3. a 4. studijním roce, absolventi matematiky a jiní vědečtí pracovníci, pokud jsou schopni s úspěchem se zúčastniti.*

Dále se zabývejme pouze činností matematického semináře, jehož náplní bylo většinou studium diferenciálních rovnic. Poznamenejme, že někteří studenti, kteří se zúčastňovali těchto seminářů, zůstali věrni problematice diferenciálních rovnic i ve své další vědecké práci.

Seminář v zimním a letním semestru 1945/46:

V seznamu přednášek na zimní semestr matematický seminář není uveden, o jeho činnosti však existují v archivu O. Borůvky doklady. V obou semestrech byla probírána teorie grup podle knihy O. Borůvky *Úvod to teorie grup* (Královská česká společnost nauk, Praha, 1944, 80 str.). Zapsáno bylo 25 posluchačů. V každém semináři referovali jeden nebo dva posluchači na zadané téma z teorie grup.

Seminář v zimním semestru 1946/47:

V semináři byly probírány vybrané statě z teorie diferenciálních rovnic. Zapsáno bylo 60 posluchačů, z nichž referovali:

Datum	Jméno	Název referátu
23. 10.	Z. Hustý	Důkaz Ascoliovy věty o posloupnostech funkcí
6. 11.	V. Žižka	O základních pojmech o dif. rovnici $y' = f(x, y)$
13. 11.	M. Novotný	Existenční theorém o řešeních systému diferenciálních rovnic v nekonečném oboru
20. 11., 4. 12., 11. 12.	O. Hajkr	O největším a nejmenším řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ (podle práce: F. Montel, Sur l'intégrale supériuere et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle. Bull. Sci math., (1923))
8. 1.	B. Zendulka	Věty o porovnání řešení dvou diferenciálních rovnic (podle téže práce)
15. 1., 22. 1.	B. Zendulka	Věty o jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ (podle téže práce)
29. 1.	M. Novotný	Existenční theorém o řešeních systému diferenciálních rovnic v konečném oboru.

Písemné práce nebyly předloženy.

Seminář v letním semestru 1946/47:

V semináři byly probírány vybrané statě z teorie diferenciálních rovnic. Zapsáno bylo 55 posluchačů, z nichž referovali:

Datum	Jméno	Název referátu
5. 3., 12. 3., 19. 3.	M. Novotný	Peanův existenční theorém o řešeních systému diferenciálních rovnic. Lipschitzova podmínka pro systémy diferenciálních rovnic
16. 4., 30. 4., 7. 5., 14. 5.	I. Šantavý	Referát o Kamkeově práci v Acta mathematica, sv. 52 (1929)
21. 5.	V. Truneček	Diskuse řešení systému diferenciálních rovnic: $u' = vw, v' = -uw, w' = -k^2uv$ podle díla G. Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima. (Bologna 1941)
11. 6.	F. Gerža	Pokračování v referátu o Kamkeově práci v Acta mathematica, sv. 52

Mezi třemi předloženými písemnými pracemi se jedna týkala diferenciálních rovnic:

J. Sedláček	Nová metoda k řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ pomocí postupných aproximací (podle W. Quadea, Math. Z. 45 (1942))

Seminář v zimním semestru 1947/48:

V semináři byla probírána teorie grup podle knihy O. Borůvky *Úvod do teorie grup*. Zapsáno bylo 84 posluchačů. Všechny ústní referáty se týkaly teorie grup, mezi dvanácti předloženými písemnými pracemi se dvě týkaly diferenciálních rovnic:

O. Hajkr	O diferenciální rovnici $y' = k \cdot f(x, y)$
I. Šantavý	O diferenciální rovnici $y' = f(x, y, t)$

Seminář v letním semestru 1947/48:

V semináři bylo pokračováno ve výkladu teorie grup podle knihy O. Borůvky *Úvod do teorie grup*. Zapsáno bylo 69 posluchačů. Všechny ústní referáty se týkaly teorie grup, mezi pěti předloženými písemnými pracemi se jedna týkala diferenciálních rovnic:

J. Barnet	O diferenciálních rovnicích 2. řádu

Seminář v zimním semestru 1948/49:

V semináři byly probírány otázky z teorie diferenciálních rovnic. Zapsáno bylo 54 posluchačů, z nichž referovali:

Datum	Jméno	Název referátu
13. 10., 20. 10.	F. Zapletal	O dvojných nekonečných řadách
27. 10., 3. 11.	J. Václavík	O řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, když $f(x, y)$ je analytická funkce
10. 11, 17. 11., 24. 11.	S. Krohová	O diskusi řešení diferenciální rovnice $y' = g(y)f(x)$
1. 12., 15. 12., 12. 1.	J. Polášek	O řešeních diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ ve tvaru $\Psi(x, y) = k$
19. 1., 26. 1.	L. Kosková	Pokračování předešlého referátu
26. 1., 2. 2.	M. Mikulík	O největším a nejmenším integrálu diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$

Předložené písemné práce se netýkaly diferenciálních rovnic.

Seminář v letním semestru 1948/49:

V semináři byly probírány otázky z teorie diferenciálních rovnic. Zapsáno bylo 37 posluchačů, z nichž referovali:

Datum	Jméno	Název referátu
2. 3., 9. 3., 16. 3.	M. Mikulík	O největším a nejmenším řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ (podle Montela)
23. 3., 30. 3.	M. Mikulík	O důkaze Perronova existenčního theorému na základě Montelovy práce
6. 4., 4. 5.	O. Krobath	O řešení diferenciální rovnice $0 = f(x, y, y')$
11. 5.	M. Černohorský	O řešeních diferenciální rovnice Besselovy $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
25. 5.	J. Široký	Clairautova diferenciální rovnice

Mezi šesti písemnými pracemi se dvě týkaly diferenciálních rovnic:

M. Kovářová	O řešení diferenciální rovnice 1. řádu v okolí singulárního bodu
J. Polášek	Řešení diferenciálních rovnic v okolí singulárního bodu

Seminář v zimním a letním semestru 1949/50:

V obou semestrech byla probírána teorie grup podle knihy O. Borůvky *Úvod do teorie grup*. Zapsáno bylo 32 posluchačů v zimním a 23 v letním semestru. Všechny přednesené referáty se týkaly teorie grup.

Činností tohoto matematického semináře jsme se podrobně zabývali především z toho důvodu, že ho lze považovat za základ, z něhož vyrostl vědecký seminář pro studium diferenciálních rovnic. Také mnozí ze studentů matematického semináře se později stali aktivními členy vědeckého semináře, např. Z. Hustý, M. Novotný, I. Šantavý, M. Mikulík nebo J. Široký. Podrobněji o činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic pojednáme ve IV. části této práce.

Z předchozích poznámek víme, že O. Borůvka začal ihned po roce 1945 vést přednášky z diferenciálních rovnic. Navázal tím na své přednášky předválečné. V této době byl také jediným přednášejícím tohoto předmětu. Přibližně od poloviny padesátých let začali diferenciální rovnice přednášet i jeho mladší kolegové, jako M. Zlámal nebo M. Ráb.

Přehled o všech přednáškách z diferenciálních rovnic a jejich přednášejících na Přírodovědecké fakultě MU od jejího založení do roku 1960 dává následující tabulka.

Rok	Semestr (počet hodin týdně)	Přednášející	Název přednášky
1922/23	L(3)	B. Hostinský	Integrální počet a differenciální rovnice
1923/24	Z(5)+L(5)	E. Čech	Diferenciální rovnice
1927/28	Z(3)+L(2)	E. Čech	Diferenciální rovnice
1930/31	Z(2)+L(2)	J. Kaucký	Diferenciální rovnice
1932/33	L(5)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1934/35	L(3)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1936/37	Z(5)+L(5)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1937/38	L(2)	E. Čech	Diferenciální rovnice
1938/39	L(3)	E. Čech	Diferenciální rovnice
1939/40	Z(2)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1945/46	Z(5)+L(5)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1947/48	Z(5)+L(5)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1948/49	Z(5)+L(5)	O. Borůvka	Diferenciální rovnice vyšších řádů
1950/51		O. Borůvka	Diferenciální rovnice
1953/54		O. Borůvka	Diferenciální rovnice
		M. Zlámal, M. Ráb	Parciální diferenciální rovnice
1954/55		O. Borůvka	Diferenciální rovnice
		L. Seifert, V. Horák	Diferenciální rovnice
1955/56		O. Borůvka	Diferenciální rovnice
		L. Seifert, V. Horák	Diferenciální rovnice
1956/57		E. Barvínek	Obyčejné diferenciální rovnice
		M. Zlámal	Parciální diferenciální rovnice
1957/58		M. Zlámal, E. Barvínek	Diferenciální rovnice
		M. Ráb	Diferenciální rovnice obyčejné
		M. Zlámal	Parciální diferenciální rovnice
1958/59		M. Ráb, M. Zlámal	Diferenciální rovnice 2. řádu
		O. Borůvka	Diferenciální rovnice obyčejné
1959/60		M. Ráb	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Pedagogické činnosti O. Borůvky v padesátých letech se nebudeme dále věnovat, pouze poznamenejme, že rozvoj celé univerzity byl v padesátých letech velmi podstatně ovlivněn různými změnami v organizaci studia a ve struktuře jednotlivých pracovišť.

Od začátku studijního roku 1948/49 vstoupila v platnost reforma vysokoškolského studia, která se týkala jak organizace, tak i obsahu studia. Do života všech fakult se zaváděl pevnější řád, který znamenal potlačení někdejší akademické svobody. Do té doby si každý posluchač mohl zapsat libovolné přednášky, které se právě na fakultě konaly, a bylo na něm, které si vybere. Nejdůležitější bylo, aby na konci studia složil s úspěchem předepsané zkoušky. Nyní byl vypracován přesný sled jednotlivých přednášek, seminářů a cvičení pro celou dobu studia. Jejich návštěva se stala povinnou, byla omezena možnost volby přednášek a cvičení a vybudován pevný systém zkoušek. Došlo ke zrušení systému dvou státních zkoušek a nahrazení systémem zkoušek dílčích, zakončených zkouškou závěrečnou, jejíž součástí byla písemná diplomová práce. K tomu přistupovalo zavedení výuky společenských nauk, marxismu-leninismu a později vojenská příprava. Byl změněn i systém přijímání na vysoké školy; bylo prosazováno hledisko přednostního přijímání studentů z dělnických rodin, byla zavedena směrná čísla pro jednotlivé obory a mnoho dalších administrativních opatření.

V roce 1952 bylo na přírodovědecké fakultě zrušeno učitelské studium a zůstalo jen studium odborné. Záhy se však ukázala nesmyslnost tohoto rozhodnutí a tak bylo od roku 1956 opět učitelské studium v dvoupředmětových kombinacích zavedeno.

Organizační zásahy do struktury školy měly svůj důsledek i ve změně jejího názvu. Od podzimu 1954 přestala univerzita používat svého původního názvu Masarykova a nazývala se brněnskou univerzitou. Teprve v roce 1960 dostala nový název – Universita Jana Evangelisty Purkyně.

Organizační struktura kateder, zavedená počátkem padesátých let, umožňovala početní růst učitelských sil, odborných asistentů a asistentů. Představy o nutnosti specializace vedly ke vzniku nových specializovaných pracovišť, docházelo k osamostatňování jednotlivých oborů, k jejich dalšímu členění, slučování a rozdělování, tak jak to odpovídalo potřebám rozvoje vědecké i pedagogické práce.

Z ústavu matematiky byla roku 1951 vytvořena katedra matematiky vedená K. Koutským, roku 1959 vznikla katedra algebry a geometrie pod vedením F. Šika, roku 1963 katedra matematické analýzy vedená M. Novotným a téhož roku dostala původní katedra matematiky název katedra numerické matematiky.

K organizačnímu uklidnění a celkové stabilizaci dochází až v první polovině šedesátých let. To samozřejmě přispělo k novému rozvoji vědecké i pedagogické práce.

Poznámka k pedagogickému působení O. Borůvky v Bratislavě

Již jsme se zmínili o tom, že O. Borůvka v poválečných letech vypomáhal s přednáškami i na jiných fakultách. Za nejvýznamnější z této pedagogické činnosti O. Borůvky mimo Přírodovědeckou fakultu MU lze považovat jeho dlouhodobé působení (1947 – 1958) na Přírodovědecké fakultě Komenského univerzity v Bratislavě.

Co přivedlo O. Borůvku k tomu, aby po dobu jedenácti a půl roku při plném úvazku v Brně dojížděl přednášet do Bratislavy? Citujme z [B12]:

Když jsem jako malý hoch chodil se svým otcem, který byl učitelem na Moravském Slovácku, po procházkách směrem k Veselí nad Moravou, dovídal jsem se od něj, že tam za těmi horami, kterým se říká Bílé Karpaty, žijí naši bratří Slováci v krutém národním a kulturním útisku pod maďarskou nadvládou. Je přirozené, že mně pod vlivem této výchovy bylo Slovensko vždycky velmi blízké. Když pak v r. 1946 hledal profesor Juraj Hronec, tehdy profesor na SVŠT v Bratislavě, na brněnské universitě síly pro výpomoc v přednáškách na bratislavské přírodovědecké fakultě, neváhal jsem ani chvíli, abych se k (bezplatné) činnosti přihlásil.

Původně měl O. Borůvka zahájit přednášky v Bratislavě již v zimním semestru 1946/47. Z důvodu velkého pracovního zatížení v Brně však zahájil svoji činnost v Bratislavě až v letním semestru 1946/47. Citujme z dopisu O. Borůvky J. Hroncovi z 5. října 1946:

Jistě jste již ráčil z děkanství obdržeti zprávu, že jsem oznámil, že zahájím přednášky a cvičení na tamnější přírodovědecké fakultě až v letním běhu. Musel jsem se k tomuto odkladu rozhodnouti (a učinil jsem tak vskutku s těžkým srdcem) protože, jak jsem Vám si dovolil ve svém prvním dopise *oznámiti, bude v tomto zimním běhu trvati ještě můj úvazek (6 hod. přednášek + 2 hod. cvičení) na zdejší technice, při čemž budu muset vyzkoušet několik set posluchačů. Kromě toho, proti očekávání, zahájí se v tomto zimním běhu přednášky i na pedagogické fakultě zdejší university, na níž jsem slíbil vypomoci přednáškami již asi před rokem. Jde zde sice jenom o 3 hod. týdně, ale protože toto všechno jest vedle mé normální povinnosti na zdejší přírodovědecké fakultě, byla by nyní jakákoli další činnost na Vaší universitě nad mé síly. V letním běhu mně však odpadne můj úvazek na zdejší technice a proto určitě počítám s tím, že u Vás budu moci zahájiti činnost.*

A tak O. Borůvka, počínaje letním semestrem 1946/47, dojížděl pravidelně přednášet do Bratislavy. Během této doby vedl přednášky na různá témata. Kromě vybraných kapitol z diferenciálních rovnic, které přednášel nejčastěji, bylo možno slyšet jeho přednášky z teorie grup, matic, iracionálních čísel, z teorie Lebesgueova integrálu, teorie míry nebo integrálních rovnic.

Nutno říci, že se O. Borůvka vždy se snažil, aby čeští a slovenští matematikové navazovali co nejužší kontakty. Již od počátku svého působení na Slovensku začal organizovat tzv. matematické výlety, jichž se zpočátku zúčastňovali hlavně studenti z Brna a Bratislavy, ale postupem času se přidávali i studenti a pedagogové z jiných českých a slovenských škol. Jeden rok organizovalo výlet Brno, druhý rok Bratislava, vždy na nějaké pěkné místo Čech nebo Slovenska. A tak vznikala nová přátelství a všichni získávali nenahraditelné kontakty.

A jak říkám, jezdil jsem tam 11 a půl roku a mám na tuto dobu ty nejlepší vzpomínky. Setkal jsem se tam s mladými lidmi, dychtivými, nadanými, charakterními, které jsem si velmi oblíbil. Mnozí z nich jsou profesory na vysokých školách a dnes už pomalu odcházejí do důchodu. Tito moji žáci působí nejen v Bratislavě, ale i v Košicích a Žilině. Velmi rád jsem měl a mám např. nynějšího děkana MFF v Bratislavě profesora a nyní slovenského akademika Michala Greguše, s nímž mě dodnes pojí nejlepší přátelství. A těch přátelských svazků tam mám skutečně velmi mnoho a myslím si, že opravdu upřímných. [B17]

III Teorie fází, dispersí a transformací

Cílem této části je vyložit Borůvkovu teorii fází, dispersí a transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Jedná se o velmi rozsáhlou a bohatou globální kvalitativní teorii s vysokým stupněm geometrizace a algebraizace. O. Borůvka shrnul základní principy a výsledky této teorie ve své monografii *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* [16], vydané v Berlíně v roce 1967 a v rozšířené verzi *Linear Differential Transformations of the Second Order* [25] vydané v Londýně roku 1971. Na tyto výsledky navázal Borůvkův žák a později jeho nejbližší spolupracovník František Neuman, který vytvořil globální teorii transformací pro rovnice n-tého řádu.

Náš výklad teorie fází, dispersí a transformací vychází z Borůvkova analytického přístupu popsaného v jeho monografii [25]. Hlavním cílem je vyložit tuto teorii stručně a srozumitelně s důrazem na nejdůležitější Borůvkovy výsledky. Zvolili jsme přitom vlastní přístup, částečně odlišný od Borůvkovy knihy. Snažíme se o výklad v „dnes používaném matematickém stylu", tj. základní pojmy uvádíme v definicích, základní výsledky ve větách. Zdůrazňujeme to zde proto, že Borůvkova monografie je sepsána dřívějším stylem „jednolitého" textu bez výrazných definic pojmů, což poněkud komplikuje orientaci v textu.

Výklad Borůvkovy teorie je rozdělen na čtyři hlavní kapitoly. První kapitola je věnována připomenutí obecnějších pojmů, které budou později používány. Jedná se především o průvodní diferenciální rovnici, konjugované body a typy diferenciálních rovnic. Je zde také zařazen odstavec věnovaný transformaci závisle a nezávisle proměnné, kterou použijeme při odvození některých důležitých výsledků.

Další kapitoly jsou věnovány postupně teoriím fází, dispersí a transformací. Snažíme se přitom o zachování podobného schématu každé kapitoly a o uvedení předpokladů, za nichž je daná teorie budována. Jak již bylo řečeno, důležité pojmy jsou uvedeny v definicích, důležitá tvrzení ve větách. Důkazy budeme provádět pouze v případě, že se jedná o větu velmi důležitou nebo užijeme-li jiný způsob důkazu než používá O. Borůvka. U některých vět však z důvodu přílišné zdlouhavosti důkazu uvádíme pouze odkaz na důkaz v monografii [25].

Námi užívaná terminologie vychází z překladů anglických termínů z monografie [25]. Je třeba podotknout, že některé názvy se vlivem prací dalších autorů postupem času pozměnily, my se však snažíme zachovat Borůvkovu původní terminologii.

Vzniku teorie fází, dispersí a transformací v rámci činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic a vlivu této teorie na vědeckou činnost dalších matematiků je věnována IV. část práce. Při popisu témat probíraných v semináři budeme často využívat pojmy z Borůvkovy teorie, což je také důvodem zařazení matematického výkladu této teorie před historické poznámky k jejímu vzniku.

Použitá označení

Označení použitá pro rovnici $(q):\ y'' = q(t)y$

q	...	nosič rovnice
u, v, y	...	řešení
w	...	wronskián řešení
j	...	definiční interval
t	...	nezávisle proměnná
$' = \frac{d}{dt}$	...	derivace
α, β	...	první a druhá fáze
$\varphi_n, \psi_n, \chi_n, \omega_n$	...	centrální disperse 1. až 4. druhu
X	...	obecná disperse

Označení použitá pro rovnici $(Q):\ \ddot{Y} = Q(T)Y$

Q	...	nosič rovnice
U, V, Y	...	řešení
W	...	wronskián řešení
J	...	definiční interval
T	...	nezávisle proměnná
$\dot{} = \frac{d}{dT}$	...	derivace
$\mathcal{A}$	...	první fáze

Další označení

$C^0(j)$	...	třída všech spojitých funkcí na intervalu j
$C^k(j)$	...	třída všech funkcí, jež mají na intervalu j spojitou derivaci až do k-tého řádu včetně ($k = 1, 2, \dots$)
$\{h, t\}$	...	Schwarzovská derivace funkce h v bodě t
$\widehat{q}$	...	nosič průvodní rovnice $(\widehat{q})$ k rovnici (q)
y_1	...	řešení průvodní rovnice $(\widehat{q})$

1 Úvodní poznámky

Tato kapitola je věnována úvodu do problematiky, zavedení některých dále používaných pojmů a postupů. Vycházíme přitom ze základního kurzu diferenciálních rovnic.

Připomeňme, že *diferenciální rovnicí* rozumíme rovnici, v níž vystupuje neznámá funkce a její derivace. Je-li hledaná funkce funkcí jedné proměnné, mluvíme o *obyčejné diferenciální rovnici*, je-li funkcí více proměnných (v rovnici vystupují tedy parciální derivace), mluvíme o *parciální diferenciální rovnici*. Řád nejvyšší derivace, obsažené v dané diferenciální rovnici, nazýváme *řádem této rovnice*.

Velký význam při popisu jevů a dějů probíhajících v přírodě hrají parciální diferenciální rovnice 2. řádu, jejichž řešení vede v mnoha případech na řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. nebo 2. řádu.

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu však umíme explicitně řešit jen ve velmi speciálních případech jako jsou rovnice s konstantními koeficienty, Eulerova rovnice nebo rovnice, jejímiž řešeními jsou tzv. speciální funkce (Besselovy funkce, Airyho funkce nebo ortogonální polynomy). Proto má velký význam tzv. kvalitativní teorie rovnic 2. řádu, kdy jsou pomocí koeficientů rovnice popsány vlastnosti řešení rovnice, např. rozložení nulových bodů. Jednou z těchto teorií je Borůvkova teorie fází, dispersí a transformací pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

1.1 Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu v Jacobiho tvaru

Úvodem připomeňme, co rozumíme pod pojmem obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

Obyčejnou diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

nebo, je-li rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci, rovnici

$$y'' = f(t, y, y').$$

Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = f(t), \qquad p_1, p_0, f \in C^0(j).$$

Obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu rozumíme rovnici

$$y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0, \qquad p_1, p_0 \in C^0(j). \qquad (a)$$

Hlavním objektem zkoumání v Borůvkově teorii fází, dispersí i transformací je obyčejná homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu ve speciálním tzv. *Jacobiho tvaru*

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \qquad (q)$$

kde $j = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Funkci $q(t)$ budeme nazývat *nosič* rovnice (q).

Vidíme, že rovnice (q) je speciálním tvarem rovnice (a). Přitom platí, že každou rovnici tvaru (a) lze jednoduše transformovat na rovnici tvaru (q). Jednou z možností, za předpokladu $p_1 \in C^1$, je transformace

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p_1(\sigma)d\sigma} z(t).$$

Uvedený předpoklad spojitosti koeficientů uvažovaných diferenciálních rovnic na intervalu j je přitom garantem existence a jednoznačnosti řešení každé tzv. Cauchyovy počáteční úlohy.

Definice 1.1.1 *Řešením* rovnice (q) budeme rozumět funkci $y \in C^2$ definovanou na intervalu $i \subseteq j$, která danou rovnici splňuje, tj. pro $t \in i$ je $y''(t) = q(t)y(t)$.

Bod $t \in i$, pro nějž platí $y(t) = 0$, nazýváme *nulovým bodem řešení* y.

Je zřejmé, že nulová funkce $y = 0$ je vždy řešením rovnice (q). Toto tzv. triviální řešení však v dalších úvahách nebudeme uvažovat a pod pojmem řešení budeme rozumět pouze řešení netriviální.

Jsou-li $u(t), v(t)$ řešení rovnice (q), pak také jejich libovolná lineární kombinace $y = c_1u + c_2v$, kde c_1, c_2 jsou libovolná čísla, je řešením rovnice (q).

Definice 1.1.2 Nechť funkce $u(t)$, $v(t)$ mají v intervalu j spojité první derivace. Pak determinant

$$w(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

se nazývá *Wronského determinant*, neboli *wronskián* příslušný k funkcím u, v.

Jsou-li u, v řešeními rovnice (q), pak jejich wronskián $w = uv' - u'v$ má na intervalu j konstantní hodnotu. To plyne z toho, že $w'(t) = 0$ na j.

Připomeňme také, že řešení $u(t)$, $v(t)$ jsou lineárně závislá, je-li $w(t) = 0$ a lineárně nezávislá, je-li $w(t) \neq 0$ v libovolném bodě $t \in j$.

Definice 1.1.3 Nechť u, v jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q). Pak uspořádanou dvojici (u, v) těchto řešení nazýváme *báze rovnice* (q).

Je-li (u, v) v intervalu j báze rovnice (q), pak každé řešení y této rovnice lze v intervalu j vyjádřit ve tvaru $y(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$, kde c_1, c_2 jsou vhodné konstanty. Říkáme, že $y(t)$ je *obecným řešením* rovnice (q).

Příklad. Funkce $u(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$ jsou v intervalu $(-\infty, \infty)$ řešeními rovnice

$$y'' = -y. \tag{$\star$}$$

Snadno zjistíme, že tato řešení jsou lineárně nezávislá, neboť $w = 1$, a lze je tedy považovat za bázi rovnice $(\star)$. Obecné řešení rovnice $(\star)$ je

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Některé vlastnosti řešení rovnice (q)

- Nechť $t_0 \in j$ a nechť y_0, y_0' jsou libovolná reálná čísla. Počáteční problém

$$y'' = q(t)y, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'$$

  má právě jedno řešení definované na celém intervalu j.

- Je-li u řešení rovnice (q), $u(t) \neq 0$ na $i \subseteq j$, pak funkce v daná vztahem

$$v(t) = u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{u^2(s)},$$

  kde $t_0 \in i$, je také řešením rovnice (q) na i, a to takovým, že řešení u, v jsou lineárně nezávislá a wronskián $w = 1$ na intervalu i.

- Všechna řešení diferenciální rovnice (q) tvoří dvourozměrný lineární prostor r, který nazýváme *prostorem řešení*. Každá uspořádaná dvojice lineárně nezávislých řešení u, v rovnice (q) tvoří bázi (u, v) prostoru řešení r a každé řešení $y \in r$ je pak jednoznačně určeno konstantními souřadnicemi c_1, c_2 v bázi (u, v), tj. $y = c_1 u + c_2 v$. A naopak, každému bodu (c_1, c_2) v kartézské soustavě souřadnic odpovídá právě jedno řešení $y \in r$ se souřadnicemi c_1, c_2 v bázi (u, v).

- Báze (u, v) určuje rovinnou křivku, která je dána parametricky rovnicemi $x_1 = u(t)$, $x_2 = v(t)$, $t \in j$. Chápeme-li t jako čas, pak je tato křivka trajektorií bodu $P(t) = P[u(t), v(t)]$ v rovině (x_1, x_2).

Nulové body řešení

Říkáme, že nulové body t_1, t_2 řešení $u(t)$ jsou *sousední*, když je $u(t_1) = u(t_2) = 0$ a pro $s \in (t_1, t_2)$ je $u(s) \neq 0$.

Některé vztahy mezi nulovými body řešení rovnice (q):

- Je-li nosič $q \neq 0$, pak mezi dvěma sousedními nulovými body řešení y rovnice (q) leží právě jeden nulový bod derivace y' a mezi dvěma sousedními nulovými body derivace y' leží právě jeden nulový bod řešení y.

- Jestliže mezi dvěma sousedními nulovými body řešení y rovnice (q) nebo mezi dvěma sousedními nulovými body derivace y' nebo mezi nulovým bodem řešení y a nulovým bodem derivace y' je nosič $q \neq 0$, pak musí být mezi těmito body záporný, tj. $q < 0$.

- Sturmova věta:
  Nechť u, v jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (q) a nechť jsou dány body $t_1, x_1 \in j$, $t_1 < x_1$. Pak platí:

  1. Nechť $u(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak řešení v má v intervalu (t_1, x_1) právě jeden nulový bod.

2. Nechť $u'(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u'(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak funkce v' má v intervalu (t_1, x_1) právě jeden nulový bod.
3. Nechť $u'(t_1) = u(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak, je-li $t_2 < t_1$, $v'(t_2) = 0$, pak řešení v má nulový bod $x_2 \in (t_2, x_1)$ a je-li $x_2 > x_1$, $v(x_2) = 0$, pak funkce v' má nulový bod $t_2 \in (t_1, x_2)$.
4. Nechť $u(t_1) = u'(x_1) = 0$, $u(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, x_1)$. Pak, je-li $t_2 < t_1$, $v(t_2) = 0$, pak funkce v' má nulový bod $x_2 \in (t_2, x_1)$ a je-li $x_2 > x_1$, $v'(x_2) = 0$, pak funkce v má nulový bod $t_2 \in (t_1, x_2)$.

Oscilatoričnost rovnice (q)

Definice 1.1.4 Řešení y diferenciální rovnice (q) se nazývá *oscilující*, má-li na intervalu j nekonečně mnoho nulových bodů. V opačném případě mluvíme o *řešení neoscilujícím.*

Všimněme si, že nulové body řešení y nemohou mít hromadný bod ξ uvnitř intervalu j. V takovém případě by totiž bylo $y(\xi) = y'(\xi) = 0$, takže by vzhledem k jednoznačnosti řešení každého počátečního problému rovnice (q) muselo být $y(t) = 0$, což je triviální řešení a to jsme z našich úvah vyloučili. Má-li tedy řešení y nekonečně mnoho nulových bodů, pak je jejich hromadným bodem buď levý nebo pravý koncový bod intervalu j.

Ze Sturmovy věty plyne, že všechna řešení y rovnice (q) mají na intervalu j stejný oscilatorický charakter, tj. buď konečný nebo nekonečný počet nulových bodů. Tedy, osciluje-li jedno řešení rovnice (q), pak oscilují všechna řešení a rovnice se nazývá *oscilatorická*. V opačném případě mluvíme o *neoscilatorické diferenciální rovnici.*

Oscilatoričnost rovnice (q) úzce souvisí s hodnotou nosiče q. Existuje velká řada kritérií, jež tento vztah popisují. Uveďme pro ukázku některá z nich:

- Diferenciální rovnice (q) je na intervalu j neoscilatorická, jestliže pro každé $t \in j$ platí $q(t) \geq 0$.
- Diferenciální rovnice (q) je oscilatorická na j, jestliže existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim_{t\to\infty} q(t)$ taková, že
$$\lim_{t\to\infty} q(t) < 0.$$
- (Kneserova věta) Nechť $j =< t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. Diferenciální rovnice (q) je oscilatorická na j, jestliže pro každé $t \in j$ platí
$$q(t) \leq -\frac{1+\delta}{4t^2}, \qquad \text{kde} \quad \delta > 0$$
a neoscilatorická na j, jestliže pro každé $t \in j$ platí
$$-\frac{1}{4t^2} \leq q(t) < 0.$$

Příklady.

1. Rovnice $y'' = y$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ neoscilatorická, neboť $q(t) = 1 > 0$.

2. Rovnice $y'' = -y$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ oscilatorická, neboť $\lim_{t\to\infty} q(t) = -1 < 0$.

3. Rovnice
$$y'' = -(1 + \frac{1-4n^2}{t^2})y,$$
kde n je libovolná konstanta, je na intervalu $(0, \infty)$ oscilatorická, neboť $\lim_{t\to\infty} q(t) = -1 < 0$.

4. Rovnice
$$y'' = \frac{c}{t^2}y,$$
kde c je libovolná konstanta, je na intervalu $(0, \infty)$ oscilatorická pro všechna $c < -\frac{1}{4}$ a neoscilatorická pro všechna $c \geq -\frac{1}{4}$.

Na začátku jsme ukázali, že každou diferenciální rovnici (a) lze přetransformovat na diferenciální rovnici tvaru (q). Tato transformace má tu vlastnost, že nulové body řešení rovnice (a) jsou nulovými body řešení rovnice (q) (zachovává oscilatoričnost řešení rovnic (a) a (q)). Při studiu oscilatorických vlastností se proto stačí omezit na rovnice tvaru (q).

Typ a druh rovnice (q)

Pomocí nulových bodů jsme zavedli pojmy oscilatorické a neoscilatorické rovnice. Nyní toto rozdělení rovnic založené na počtu nulových bodů rozšíříme o pojmy *typ* a *druh* diferenciální rovnice. S těmito pojmy, jež zavedl O. Borůvka, se budeme dále často setkávat.

Definice 1.1.5 Řekneme, že diferenciální rovnice (q) je *konečného typu* m ($m = 1, 2, \dots$), je-li neoscilatorická a existuje-li řešení rovnice (q) s m nulovými body na intervalu j a neexistuje řešení s $m + 1$ nulovými body.

Dále řekneme, že rovnice (q) konečného typu m je *obecného druhu*, existují-li dvě lineárně nezávislá řešení s $m - 1$ nulovými body na intervalu j. V ostatních případech říkáme, že je *speciálního druhu*.

Diferenciální rovnice (q) se nazývá *nekonečného typu*, je-li oscilatorická na intervalu j. Rovnice nekonečného typu dále rozdělujeme podle druhu na *vlevo* a *vpravo oscilatorické* a *oboustranně oscilatorické*.

Příklad. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu j.

Je-li $j = (0, \frac{\pi}{2})$, pak je tato rovnice konečného typu 1, obecného druhu, neboť na intervalu j neexistuje řešení se dvěma nulovými body, existuje řešení s jedním nulovým bodem a zároveň existují dvě lineárně nezávislá řešení, která nemají na tomto intervalu žádný nulový bod.

Je-li $j = (0, \pi)$, pak je tato rovnice konečného typu 1, speciálního druhu, neboť na intervalu j neexistuje řešení se dvěma nulovými body, existuje řešení s jedním nulovým bodem a neexistují dvě lineárně nezávislá řešení, která nemají na tomto intervalu žádný nulový bod.

Je-li $j = (-\infty, \infty)$, pak je tato rovnice nekonečného typu, oboustranně oscilatorického druhu, neboť na intervalu j mají všechna řešení nekonečně mnoho nulových bodů.

1.2 Transformace závisle a nezávisle proměnné

V dalším textu se v mnohých důkazech a odvozeních setkáme s transformací závisle a nezávisle proměnné. Věnujme se proto obecnému odvození tvaru těchto transformací podrobněji.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \qquad Q(T) \in C^0(J), \tag{Q}$$

kde $\dot{} = d/dT$.

Provedeme-li transformaci závisle proměnné Y na y a nezávisle proměnné T na t, dostaneme rovnici

$$y'' = q(t)y, \qquad q(t) \in C^0(j). \tag{q}$$

Nadále budeme v celé práci používat označení pro derivaci podle proměnné t, resp. T

$$' = \frac{d}{dt}, \qquad\qquad \dot{} = \frac{d}{dT}.$$

Ukažme nyní, jak lze tyto transformace provést, tj. jak lze vzájemně transformovat diferenciální rovnice (Q) a (q). Vlastní transformaci provedeme ve dvou krocích, v prvním transformujeme závisle proměnnou a v druhém nezávisle proměnnou.

Transformace závisle proměnné

Nechť funkce y je řešením rovnice (q) a položme $y(t) = h(t)z(t)$ za předpokladu, že funkce $h \in C^2$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Pak $y' = h'z + hz'$ a $y'' = h''z + 2h'z' + hz''$. Dosazením derivací do rovnice (q) dostaneme

$$h^2z'' + 2hh'z' = h(-h'' + qh)z,$$

tj.

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z. \tag{1.2.1}$$

Transformace nezávisle proměnné

Nechť $z(t)$ je řešením (1.2.1) a položme $z(t) = Y(T)$, $T = X(t)$ za předpokladu, že funkce $X \in C^2$, $X'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Touto transformací chceme transformovat rovnici (1.2.1) na rovnici (Q). Dosazením derivací vztahu $z(t) = Y(X(t))$, tj.

$$z'(t) = \dot{Y}(X(t))X'(t), \qquad z''(t) = \ddot{Y}(X(t))X'^2(t) + \dot{Y}(X(t))X''(t)$$

do rovnice (1.2.1) dostáváme

$$h(t)X'^2(t)\ddot{Y}(X(t)) + (2h'(t)X'(t) + h(t)X''(t))\dot{Y}(X(t)) = (-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)). \tag{1.2.2}$$

Protože chceme dostat rovnici (Q), tj. rovnici, která má koeficient u první derivace nulový, položíme

$$2h'(t)X'(t) + h(t)X''(t) = 0.$$

Substitucí $\eta(t) = X'(t)$ obdržíme rovnici 1. řádu $2\eta(t)h'(t) + \eta'(t)h(t) = 0$, jejímž řešením je funkce $\eta(t) = X'(t) = h^{-2}(t)$. Dosazením tohoto výsledku zpět do vztahu (1.2.2) dostáváme

$$h^{-3}(t)\ddot{Y}(X(t)) = (-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)),$$

odkud obdržíme rovnici (Q) ve tvaru

$$\ddot{Y}(X(t)) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))Y(X(t)). \tag{1.2.3}$$

Ze vztahu $X'(t) = h^{-2}(t)$ plyne

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma.$$

Označíme-li $T = X(t)$, lze rovnici (1.2.3) psát ve tvaru

$$\ddot{Y}(T) = Q(T)Y(T),$$

kde

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)), \qquad t = X^{-1}(T).$$

Uvedené výsledky budeme dále využívat, zformulujme je proto do věty.

Věta 1.2.1 *Nechť je dána funkce $h \in C^2(j)$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$.*

(i) *Funkce $y(t)$ daná vztahem*

$$y(t) = h(t)z(t)$$

je řešením rovnice

$$y'' = q(t)y$$

právě tehdy, když je funkce $z(t)$ řešením rovnice

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z.$$

(ii) *Funkce $z(t)$ daná vztahem*

$$z(t) = Y(T), \qquad T = X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$$

je řešením rovnice

$$(h^2z')' = h(-h'' + qh)z$$

právě tehdy, když je funkce $Y(T)$ řešením rovnice

$$\ddot{Y} = Q(T)Y,$$

kde $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$, $t = X^{-1}(T)$.

Důsledek 1.2.2 *Nechť je dána funkce $h \in C^2(j)$, $h(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$. Transformace*

$$y(t) = h(t)Y(T), \qquad T = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma \tag{1.2.4}$$

převádí řešení Y rovnice (Q) na intervalu J na řešení y rovnice (q) na intervalu j, přičemž platí $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$.

V souvislosti s transformacemi závisle a nezávisle proměnné uveďme větu o transformaci rovnice v tzv. reciproční rovnici. Tato věta, kterou obecně pro systémy rovnic 2. řádu dokázal J. H. Barrett [C21], dává do souvislosti řešení a jeho derivaci. O její platnosti se lze přesvědčit přímým derivováním.

Věta 1.2.3 *Nechť jsou dány funkce $r \in C^2(j)$, $p \in C^2(j)$ a transformace*

$$z = \frac{y'}{r}.$$

Funkce y je řešením rovnice

$$(\frac{y'}{r})' = py \tag{1.2.5}$$

právě tehdy, když funkce z je řešením tzv. reciproční rovnice

$$(\frac{z'}{p})' = rz. \tag{1.2.6}$$

Závěrem poznamenejme, že metoda transformace proměnných se často používá při odvozování oscilatorických a neoscilatorických vlastností diferenciálních rovnic druhého a vyšších řádů.

1.3 Schwarzovská derivace

Uveďme základní informace o tzv. Schwarzovské derivaci, s níž se budeme v dalším textu často setkávat.

Buď $h : I \to \mathbb{R}$, $h \in C^3(I)$, $h'(t) \neq 0$ na intervalu I. Symbolem $\{h, t\}$ označme výraz

$$\{h, t\} = \frac{1}{2}\frac{h'''(t)}{h'(t)} - \frac{3}{4}\frac{h''^2(t)}{h'^2(t)}. \tag{1.3.1}$$

Pak $\{h, t\}$ nazýváme *Schwarzovskou derivací funkce h v bodě $t \in I$.*

Věta 1.3.1 *Schwarzovská derivace funkce $h : I \to \mathbb{R}$, $h \in C^3(I)$, $h' \neq 0$ splňuje vztah*

$$\{h, t\} = -\sqrt{|h'(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|h'(t)|}}\right)'' \qquad \textit{pro každé} \qquad t \in I \tag{1.3.2}$$

a pro složenou funkci $h(k(x))$, $k \in C^3(J)$, $k' \neq 0$, $k(J) \subseteq I$ platí

$$\{h(k(x)), x\} = \{h, k(x)\}k'^2(x) + \{k, x\}. \tag{1.3.3}$$

1.4 Průvodní diferenciální rovnice $(\widehat{q})$

V tomto odstavci zavedeme pojem tzv. průvodní diferenciální rovnice, která má význam pro popis nulových bodů derivace řešení y rovnice (q), jinými slovy, pro popis možných lokálních extrémů řešení y rovnice (q). Předpokládejme, že nosič q rovnice (q) je všude nenulový a $q \in C^2$.

Definice 1.4.1 Mějme rovnici (q) s nosičem $q \neq 0$, $q \in C^2(j)$. *Průvodní diferenciální rovnicí* $(\widehat{q})$ k rovnici (q) na intervalu j rozumíme rovnici tvaru

$$y_1'' = \widehat{q}(t) y_1, \tag{$\widehat{q}$}$$

kde

$$\widehat{q}(t) = q(t) - \frac{1}{2}\frac{q''(t)}{q(t)} + \frac{3}{4}\frac{q'^2(t)}{q^2(t)}. \tag{1.4.1}$$

Poznámka. Nosič průvodní rovnice $(\widehat{q})$ může být ekvivalentně vyjádřen vztahem

$$\widehat{q}(t) = q(t) + \sqrt{|q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|q(t)|}}\right)'' \tag{1.4.2}$$

nebo pomocí Schwarzovské derivace vztahem

$$\widehat{q}(t) = q(t) - \{\int_{t_0}^{t} q(\sigma) d\sigma, t\} \qquad (t_0 \in j).$$

Význam průvodní rovnice spočívá v následující větě. Ta udává vztah mezi řešeními rovnic (q) a $(\widehat{q})$ a v důsledku toho umožňuje studovat rozložení nulových bodů řešení a extrémů řešení.

Věta 1.4.2 *Funkce $y_1(t)$ daná vztahem*

$$y_1(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{|q(t)|}} \tag{1.4.3}$$

je řešením průvodní rovnice $(\widehat{q})$ právě tehdy, když funkce $y(t)$ je řešením rovnice (q).

Důkaz.

V důkazu využijeme Vět 1.2.1 a 1.2.3.

Nechť y je řešením rovnice (q). Podle Věty 1.2.3 je y řešením rovnice (q) právě tehdy, když je funkce $z = y'$ řešením reciproční rovnice

$$(\frac{z'}{q})' = z. \tag{1.4.4}$$

Chceme-li tuto rovnici převést na rovnici v Jacobiho tvaru, použijeme transformaci závisle proměnné $y_1 = h(t)z$, popsanou ve Větě 1.2.1.

Podle Věty 1.2.1 (i) je funkce z řešením rovnice (1.4.4) právě tehdy, když je funkce $y_1 = h(t)z$ řešením rovnice $y_1'' = \widehat{q}y_1$. Z tvaru těchto rovnic plyne, že

$$h^2 = \frac{1}{q} \qquad \text{a} \qquad h(-h'' + \widehat{q}h) = 1. \tag{1.4.5}$$

Tedy pro funkci y_1, jež je řešením rovnice $(\widehat{q})$, platí

$$y_1 = h(t)z = \frac{z}{\sqrt{|q|}} = \frac{y'}{\sqrt{|q|}}.$$

Ze vztahu (1.4.5) plyne, že pro nosič $\widehat{q}$ rovnice $(\widehat{q})$ platí

$$\widehat{q} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} + h''\right) = \frac{1}{h^2} + \frac{h''}{h} = q + \sqrt{|q|}h''.$$

Derivací funkce h dostáváme

$$h' = -\frac{1}{2}\frac{q'}{q\sqrt{|q|}}, \qquad h'' = \frac{3}{4}\frac{q'^2}{q^2\sqrt{|q|}} - \frac{1}{2}\frac{q''}{q\sqrt{|q|}},$$

odkud plyne

$$\widehat{q} = q - \frac{1}{2}\frac{q''}{q} + \frac{3}{4}\frac{q'^2}{q^2}.$$

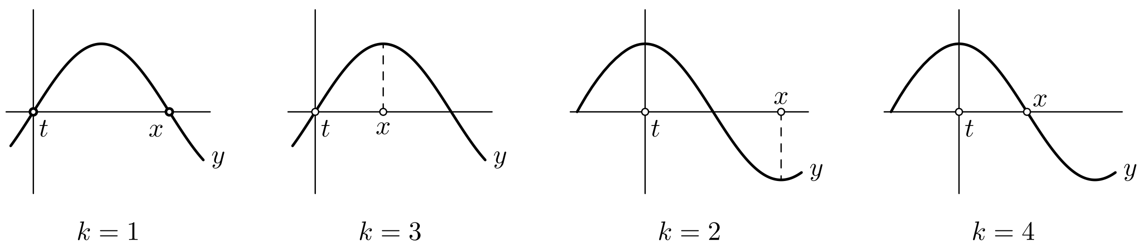
1.5 Konjugované body

Na vztahu mezi nulovými body řešení, resp. nulovými body řešení a jeho derivace, je založena následující definice konjugovaných bodů.

Definice 1.5.1 Nechť $t \in j$ je libovolný bod.

Je-li y takové řešení rovnice (q), že $y(t) = 0$, pak bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y(x) = 0$, nazýváme 1-konjugovaný s bodem t a bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y'(x) = 0$, nazýváme 3-konjugovaný s bodem t.

Je-li y takové řešení rovnice (q), že $y'(t) = 0$, pak bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y'(x) = 0$, nazýváme 2-konjugovaný s bodem t a bod $x \in j$ $(x \neq t)$, pro nějž platí $y(x) = 0$, nazýváme 4-konjugovaný s bodem t.



Obr. 1 Bod x je k-konjugovaný s bodem t

Poznámky.

- k-konjugovaný bod ($k = 1, 2, 3, 4$) bývá často také označován jako *konjugovaný bod k-tého druhu*.

- Je-li x k-konjugovaný s bodem t a $x < t$, říkáme, že x je *levý k-konjugovaný bod*, je-li $x > t$, *pravý k-konjugovaný bod*, případně podle počtu a pořadí takových bodů mluvíme o *n-tém levém* nebo *n-tém pravém k-konjugovaném bodě s bodem* t.

- Konjugované body jsou charakteristickou vlastností diferenciální rovnice (q) invariantní ke konkrétní volbě řešení, resp. báze u, v. Víme totiž, že dvě řešení rovnice (q), které mají společný nulový bod nebo jejichž derivace mají společný nulový bod, se liší pouze o konstantní násobek. Z toho plyne, že všechny jejich nulové body a všechny nulové body jejich derivací jsou shodné. Proto můžeme mluvit o *konjugovaných bodech rovnice* (q) místo o konjugovaných bodech jednotlivých řešení.

- S ohledem na k-konjugované body ($k = 1, 2, 3, 4$) můžeme rozdělit rovnice (q) na dvě třídy podle toho, jestli v intervalu j k-konjugované body existují nebo neexistují. V prvním případě říkáme, že rovnice *má k-konjugované body*, v druhém případě, že *rovnice nemá k-konjugované body*.

Závěrem uveďme větu, jež udává vztahy mezi řešeními rovnice (q) ve dvou různých bodech intervalu j.

Věta 1.5.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Pak pro libovolné body t, $x \in j$, $t \neq x$ platí:*
1) $u(t)v(x) - u(x)v(t) = 0$ právě tehdy, když t, x jsou 1-konjugované,
2) $u'(t)v'(x) - u'(x)v'(t) = 0$ právě tehdy, když t, x jsou 2-konjugované,
3) $u(t)v'(x) - u'(x)v(t) = 0$ právě tehdy, když x je 3-konjugovaný bod s bodem t a t je 4-konjugovaný bod s bodem x.

Důkaz.
Dokažme první z předchozích tvrzení.

a) Nechť t, x jsou dva různé body intervalu j a nechť platí vztah $u(t)v(x) - u(x)v(t) = 0$. Pak lineární rovnice

$$c_1u(t) + c_2v(t) = 0, \qquad c_1u(x) + c_2v(x) = 0$$

jsou splněny pro libovolné hodnoty c_1, c_2, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ a body t, x jsou nulové body řešení $y = c_1u + c_2v$ rovnice (q). Tedy t a x jsou 1-konjugované body.

b) Nechť t a x jsou 1-konjugované body. Pak $t \neq x$ a existuje řešení $y = c_1u + c_2v$ rovnice (q), které prochází body t a x a $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Z toho plyne dokazovaný vztah.

Další vztahy dokážeme analogicky.

Příklad. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu j.

Nechť $|j|$ značí délku intervalu j. Pak pro $0 < |j| \leq \frac{\pi}{2}$ rovnice nemá konjugované body, pro $\frac{\pi}{2} < |j| \leq \pi$ má rovnice 3-konjugované a 4-konjugované body a pro $\pi < |j|$ má konjugované body všech druhů.

2 Teorie fází

V této kapitole se seznámíme s teorií jistých funkcí jedné proměnné, charakterizujících rovnici (q), které O. Borůvka nazval fázemi. Budeme se zabývat otázkami existence a jednoznačnosti fází, vztahem fází a řešení rovnice (q), vlastnostmi fází a na základě těchto vlastností budeme charakterizovat každý typ a druh rovnice (q).

V celé kapitole budeme uvažovat rovnici

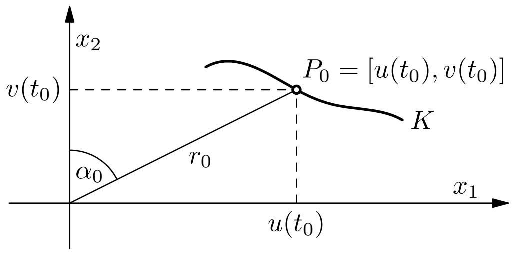
$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \tag{q}$$

kde $j = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Nejprve proveďme stručný úvod do celé problematiky na základě již známých skutečností.

Nechť (u, v) je báze řešení rovnice (q) a K křivka řešení, jejíž každý bod $P = [x_1, x_2]$ je dán vztahem $[x_1, x_2] = [u(t), v(t)]$, $t \in j$ v souřadném systému x_1x_2 s počátkem O.

Nechť $t_0 \in j$ libovolně. Pak $P_0 = [u(t_0), v(t_0)]$ je odpovídající bod křivky K. Označme symbolem r_0 průvodič bodu P_0 a α_0 úhel, který svírá průvodič r_0 s osou x_2. Předpokládáme přitom, že $r_0 > 0$, $\alpha_0 \in< 0, 2\pi)$.



Obr. 2 Zavedení první fáze

Z obrázku jsou okamžitě vidět následující vztahy

$$r_0 = \sqrt{u^2(t_0) + v^2(t_0)}, \qquad u(t_0) = r_0 \sin \alpha_0, \qquad v(t_0) = r_0 \cos \alpha_0.$$

Platí tedy

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{u(t_0)}{v(t_0)}.$$

Uvažujeme-li předchozí vztahy pro libovolné $t \in j$, dospějeme k definici spojité funkce $\alpha(t)$, jež je definována na intervalu j, nabývá hodnoty α_0 v bodě t_0 a splňuje na intervalu j rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{2.0.1}$$

všude, kromě nulových bodů funkce v. Takovou funkci budeme nazývat první fází báze (u, v).

Než přistoupíme k vlastní definici první a druhé fáze báze (u, v), zaveďme pojem první a druhé amplitudy báze.

Definice 2.0.1 Nechť (u, v) je báze rovnice (q) na intervalu j. Funkce r, s, definované na intervalu j vztahem

$$r(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \qquad s(t) = \sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)},$$

se nazývají *první* a *druhá amplituda* báze (u, v).

2.1 První fáze rovnice (q)

Na základě předběžných úvah definujme první fázi báze (u, v) pomocí řešení u a v.

Definice 2.1.1 Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q).

První fází báze (u, v) rozumíme libovolnou funkci α, spojitou na intervalu j, která na tomto intervalu splňuje vztah

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{2.1.1}$$

v každém bodě intervalu j, kromě nulových bodů řešení v.

První fází diferenciální rovnice (q) rozumíme první fázi libovolné báze rovnice (q).

Poznámka. Dále budeme často užívat místo pojmu první fáze báze (u, v) stručnějšího označení *fáze*.

Vlastnosti první fáze α báze (u, v)

Nechť α je libovolná první fáze báze (u, v) rovnice (q) na intervalu j a w wronskián řešení u, v. Z definice první fáze, zejména z vlastností funkce tangens, můžeme ihned odvodit některé její vlastnosti.

1. Vzhledem k periodicitě funkce tg není fáze α dána jednoznačně.

   Vybereme-li libovolnou fázi α, pak všechny fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

   $$\alpha_n(t) = \alpha(t) + n\pi, \qquad \text{kde} \qquad n = 0, \pm 1, \dots$$

   a budeme říkat, že tvoří tzv. *první fázový systém* (α) báze (u, v).

2. Nechť $t_0 \in j$. Pak z definice fáze a z předchozího bodu okamžitě plyne:

   $$u(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha(t_0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.2}$$

   $$v(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha(t_0) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   V nulových bodech řešení u (v) je hodnota každé první fáze sudým (lichým) násobkem $\pi/2$. A naopak každý bod v intervalu j, v němž první fáze nabývá hodnot sudých (lichých) násobků $\pi/2$ je nulovým bodem řešení u (v). Dále vidíme, že každá fáze má právě jeden nulový bod a ten je nulovým bodem řešení u; současně je každý nulový bod řešení u nulovým bodem právě jedné fáze z prvního fázového systému.

3. Vyjádření první fáze α:

   Nechť ξ_0 je nulový bod řešení v, tj. $v(\xi_0) = 0$. Označme ξ_n (ξ_{-n}), $n = 1, 2, \ldots, n$-tý nulový bod řešení v následující (předcházející) bodu ξ_0. Pak

$$\alpha(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{u(t)}{v(t)} - n\pi \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t \in (\xi_n, \xi_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi) \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t = \xi_n. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

   Z důvodu zjednodušení zápisu zavedeme novou funkci „Arctan“, která bude definována vztahem (2.1.3). Dále tedy budeme vyjádření (2.1.3) zapisovat ve tvaru

$$\alpha(t) = \operatorname{Arctan} \frac{u(t)}{v(t)}. \tag{2.1.4}$$

   Vyjdeme-li od konkrétního nulového bodu ξ_0 řešení v, pak je fáze α dána vztahem (2.1.3) jednoznačně. Každou další fázi α_n ze stejného fázového systému (α) obdržíme pomocí vztahu $\alpha_n = \alpha + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Je zřejmé, že konkrétní volba nulového bodu ξ_0 ovlivní výběr fáze $\alpha \in (\alpha)$.

4. Z přechozích bodů plyne, že zvolíme-li $t_0 \in j$ libovolně, pak ke každému celému číslu n existuje právě jedna fáze $\alpha_n \in (\alpha)$ taková, že

$$(n - \frac{1}{2})\pi \leq \alpha_n(t_0) < (n + \frac{1}{2})\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.1.5}$$

5. Derivací vztahu (2.1.3) dostáváme

$$\alpha' = \frac{v^2}{u^2 + v^2} (\frac{u'v - uv'}{v^2}) = -\frac{w}{u^2 + v^2} \neq 0.$$

   Odtud také plyne, že $\alpha' \in C^2$, neboť u, v jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q) a tudíž jsou třídy C^2. Konečně, je-li $\alpha' \in C^2$, pak $\alpha \in C^3$. Pro každou fázi α tedy platí

$$\alpha \in C^3, \qquad \alpha' \neq 0.$$

   Dále dostáváme: Je-li $w < 0$, pak první fáze α je rostoucí funkce pro každé $t \in j$ a je-li $w > 0$, pak α je klesající funkce pro každé $t \in j$.

Uveďme nyní vztah mezi první fází α a řešením u a v rovnice (q). Vzhledem k jeho důležitosti ho zformulujeme do věty.

Věta 2.1.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Nechť ξ_0 je nulový bod řešení v, tj. $v(\xi_0) = 0$. Označme ξ_n (ξ_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$, n-tý nulový bod řešení v následující (předcházející) bodu ξ_0. Pak existuje první fáze α báze (u, v) tak, že platí*

$$u(t) = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \cos \alpha(t), \tag{2.1.6}$$

tj.

$$u(t) = \varepsilon r(t) \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \varepsilon r(t) \cos \alpha(t), \tag{2.1.7}$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} v'(\xi_0)$ *a nazývá se signaturou zvolené fáze* α*,* w *je wronskián řešení* u*,* v *a* $r(t)$ *je první amplituda.*

Vztah mezi nosičem q *rovnice* (q) *a fází* α *je jednoznačně určen vztahem*

$$q(t) = -\{tg\, \alpha, t\}, \qquad tj. \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t). \tag{2.1.8}$$

Poznámka. Vzhledem k předchozím vlastnostem fáze α je zřejmé, že signatura ε fáze α je jednoznačně dána volbou nulového bodu ξ_0 řešení v.

Je-li $\varepsilon = +1$, pak se fáze nazývá *vlastní* a je-li $\varepsilon = -1$, pak se fáze nazývá *nevlastní.*

Z vlastností nulových bodů řešení v plyne, že v uspořádání fází

$$\dots < \alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

se vlastní a nevlastní fáze pravidelně střídají.

Důsledek 2.1.3 *Nechť* α *je první fáze báze* (u, v)*. Pak libovolné řešení* $y(t)$ *rovnice* (q) *lze vyjádřit ve tvaru*

$$y(t) = k_1 \frac{\sin(\alpha(t) + k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \tag{2.1.9}$$

kde k_1*,* k_2 *jsou libovolné konstanty,* $k_1 \neq 0$*,* $0 \leq k_2 < \pi$*.*

Důkaz Věty 2.1.2.

Na rozdíl původního důkazu v knize [25], kde je uvedené tvrzení ověřeno dosazením do vztahu (2.1.1), využijeme opět metodu transformace proměnných popsanou ve Větě 1.2.1 a ukážeme, jak lze vztahy (2.1.6), (2.1.7) odvodit volbou vhodné transformace.

Uvažujme diferenciální rovnici (q) a proveďme transformaci závisle proměnné $y(t) = h(t)z(t)$ a transformaci nezávisle proměnné $z(t) = Y(T)$. Zvolme přitom za funkci h první amplitudu rovnice (q), tj.

$$h(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)},$$

kde u, v jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (q).

Podle Věty 1.2.1 (i) je funkce $y(t) = h(t)z(t)$ řešením rovnice (q) právě tehdy, když je funkce $z(t)$ řešením rovnice

$$(h^2 z')' = h(-h'' + qh)z. \tag{2.1.10}$$

Podle Věty 1.2.1 (ii) je funkce $z(t) = Y(T)$, kde $T = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$, řešením rovnice (2.1.10) právě tehdy, když funkce $Y(T)$ je řešením rovnice $\ddot{Y} = Q(T)Y$, kde $Q(T) = h^3(-h'' + qh)$. Přímým dosazením funkce h a její druhé derivace h'' dostaneme $Q(T) = -w^2$ a tedy Y je tedy řešením rovnice

$$\ddot{Y} = -w^2 Y.$$

Dostali jsme rovnici s konstantními koeficienty, jejíž řešení jsou například funkce

$$Y_1(T) = \sin(wT), \qquad Y_2(T) = \cos(wT).$$

Tedy řešení rovnice (2.1.10) jsou tvaru

$$z_1(t) = \sin(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma), \qquad z_2(t) = \cos(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma)$$

a řešení rovnice (q)

$$u(t) = h(t)\sin(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma), \qquad v(t) = h(t)\cos(w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma).$$

Označíme-li

$$\alpha(t) = w \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma,$$

pak

$$\alpha'(t) = \frac{w}{h^2(t)}, \qquad h(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}.$$

Řešení rovnice (q) pak dostáváme ve tvaru

$$u(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\sin\alpha(t), \qquad v(t) = \pm\frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\cos\alpha(t). \tag{2.1.11}$$

Vztahy (2.1.7) obdržíme okamžitě, neboť

$$\frac{\sqrt{|w(t)|}}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} = h(t) = r(t).$$

Zbývá dokázat vztah (2.1.8). Víme, že funkce $u(t)$ daná vztahem (2.1.11) je řešením rovnice (q). Přímým dosazením funkce $u(t)$ a její druhé derivace do rovnice (q), tj. $u'' = qu$, dostáváme hledaný vztah (2.1.8).

Důkaz Důsledku 2.1.3

Je-li (u, v) báze rovnice (q), pak libovolné řešení $y(t)$ této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = c_1u(t) + c_2v(t).$$

Dosazením vztahů (2.1.11) dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}(l_1\sin\alpha(t) + l_2\cos\alpha(t)),$$

kde $l_1 = c_1\sqrt{|w|}$, $l_2 = c_2\sqrt{|w|}$.

Postupnými úpravami dostáváme

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\sin\alpha(t) + \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\cos\alpha(t)\right)\sqrt{l_1^2+l_2^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}(\cos\varphi\sin\alpha(t) + \sin\varphi\cos\alpha(t))\sqrt{l_1^2+l_2^2} = k_1\frac{\sin(\alpha(t)+k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}},$$

kde $k_1 = \sqrt{l_1^2+l_2^2}$, $k_2 = \varphi$.

Dvě různé fáze stejné báze (u, v)

Nechť (u, v) je libovolná pevná báze rovnice (q). Víme, že všechny fáze příslušné k této bázi tvoří první fázový systém (α) báze (u, v) a pro každé dvě fáze z (α) platí $\alpha_n = \alpha + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Uveďme nyní další vztah mezi dvěma různými fázemi ze stejného fázového systému (α).

Nechť $\alpha_0 \in (\alpha)$ je libovolná pevná fáze báze (u, v), $t \in j$ a nechť platí předpoklady a označení Věty 2.1.2.

Vyjádříme-li řešení u, v pomocí fáze α_0 ve tvaru uvedeném v Důsledku 2.1.3 a dosadíme-li tato řešení do vztahu (2.1.4), pak pro libovolnou fázi $\alpha \in (\alpha)$ dostáváme

$$\alpha(t) = \operatorname{Arctan} k_1 \frac{\sin(\alpha_0(t) + k_2)}{\sin(\alpha_0(t) + k_3)}, \tag{2.1.12}$$

kde $k_1 \neq 0$, $0 \leq k_2, k_3 < \pi$.

Fáze různých bází (u, v)**,** $(\overline{u}, \overline{v})$

Doposud jsme se zabývali pouze fázemi, jež příslušely k jedné pevně dané bázi (u, v). Nyní uvedeme vztahy mezi fázemi různých bází, neboli mezi dvěma libovolnými fázemi diferenciální rovnice (q).

Nechť (u, v), $(\overline{u}, \overline{v})$ jsou dvě různé báze rovnice (q); $w, \overline{w}$ příslušné wronskiány; $\alpha, \overline{\alpha}$ příslušné první fáze daných bází a c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} konstanty takové, že determinant $\Delta = |c_{ij}| \neq 0$.

Jestliže

$$\overline{u} = c_{11}u + c_{12}v, \qquad \overline{v} = c_{21}u + c_{22}v,$$

pak platí

$$\operatorname{tg} \overline{\alpha} = \frac{c_{11}\operatorname{tg} \alpha + c_{12}}{c_{21}\operatorname{tg} \alpha + c_{22}} \tag{2.1.13}$$

všude na intervalu j kromě bodů, kde není funkce definována.

A naopak, z platnosti vztahu (2.1.13) plyne

$$\overline{u} = \pm\sqrt{\frac{\overline{w}}{w\Delta}}(c_{11}u + c_{12}v), \qquad \overline{v} = \pm\sqrt{\frac{\overline{w}}{w\Delta}}(c_{21}u + c_{22}v).$$

Klasifikace rovnic pomocí fází

Nechť $t \in j = (a, b)$. Označme

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t), \qquad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t),$$

přičemž připouštíme i hodnoty $c, d = \pm\infty$. Pak platí

$(m-1)\pi < \lvert c-d \rvert < m\pi$	$\Leftrightarrow$	(q) je konečného typu m, obecného druhu
$\lvert c-d \rvert = m\pi$	$\Leftrightarrow$	(q) je konečného typu m, speciálního druhu
$c = \mp\infty$, d je konečné číslo	$\Leftrightarrow$	(q) je zleva oscilatorická
c je konečné číslo, $d = \pm\infty$	$\Leftrightarrow$	(q) je zprava oscilatorická
$c = \mp\infty$, $d = \pm\infty$	$\Leftrightarrow$	(q) oboustranně oscilatorická

Vyjádřeno slovně:

- Fáze α je ohraničená na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) konečného typu.
- Je-li fáze α rostoucí (klesající), pak je neohraničená zdola a ohraničená shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) vlevo (vpravo) oscilatorická.
- Je-li fáze α rostoucí (klesající), pak je ohraničená zdola a neohraničená shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) vpravo (vlevo) oscilatorická.
- Fáze α není ohraničená zdola ani shora na intervalu j právě tehdy, když je rovnice (q) oboustranně oscilatorická.

Ilustrační příklady

Příklad 1. Uvažujme rovnici $y'' = -y$ na intervalu $j = (a, b)$ a její řešení

$$u(t) = \sin t, \qquad v(t) = \cos t.$$

Pro první fázi α platí

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad t \neq \xi_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

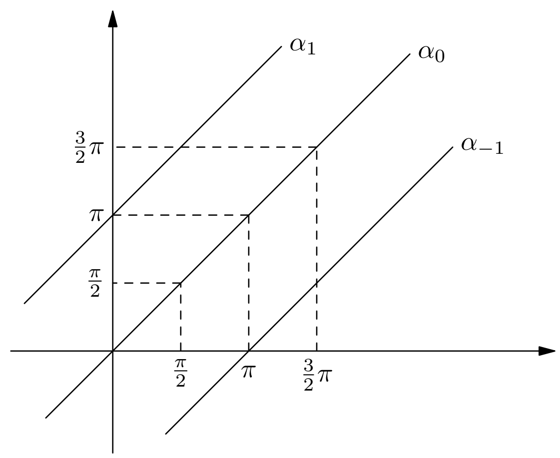
Tedy podle vztahu (2.1.3)

$$\alpha(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} - n\pi \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t \in (\xi_n, \xi_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi) \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t = \xi_n, \end{cases}$$

kde $w = -1$. Po dosazení dostáváme $\alpha(t) = t$ pro každé $t \in j$.

Označíme-li $\alpha_0 = \alpha$, pak všechny fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru $\alpha_n(t) = \alpha(t) + n\pi$, tj.

$$\alpha_n(t) = t + n\pi, \qquad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$



Obr. 3 Fázový systém (α) báze (u, v) rovnice $y'' = -y$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = \ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$, což jsou nulové body řešení u (vztah (2.1.2)).
- $\alpha(t) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, což jsou nulové body řešení v (vztah (2.1.2)).
- α je rostoucí funkce ($w < 0$).
- Ohraničenost fáze α a tudíž typ a druh rovnice (q) závisí na intervalu, na němž rovnici uvažujeme. Například na intervalu $(0, \pi)$ se jedná o rovnici konečného typu 1, speciálního druhu, na intervalu $(0, \infty)$ o rovnici zprava oscilatorickou, apod. (viz klasifikace rovnic pomocí fází).

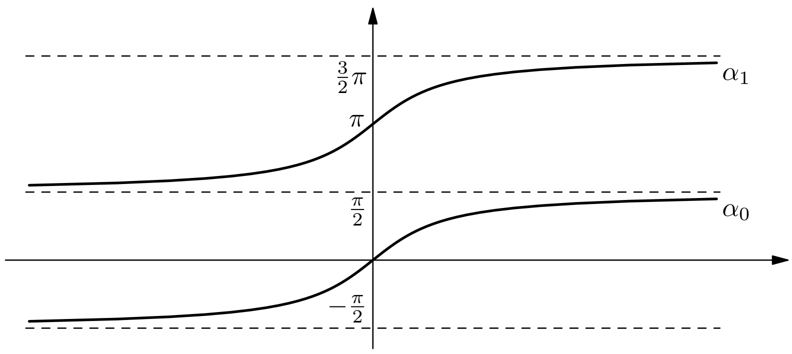
Poznamenejme, že O. Borůvka zavádí pro první fázi $\alpha(t) = t$ této diferenciální rovnice na intervalu $j = (-\infty, \infty)$ název *speciální fáze*. Jak uvidíme dále, tato speciální fáze je jednotkovým prvkem grupy všech fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$.

Příklad 2. Uvažujme rovnici $y'' = 0$ na intervalu $j = (a, b)$ a její řešení

$$u(t) = t, \qquad v(t) = 1.$$

Okamžitě vypočítáme, že

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} t \quad \text{pro každé} \quad t \in j.$$



Obr. 4 Fázový systém (α) báze (u, v) rovnice $y'' = 0$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $t = 0$, což je jediný nulový bod řešení u (vztah (2.1.2)).
- Vztah $\alpha(t) = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ není splněn pro žádné $t \in j$, tedy řešení v nemá žádný nulový bod (vztah (2.1.2)).
- α je rostoucí funkce ($w < 0$).

- Fáze α je ohraničená zdola i shora na každém intervalu j, tedy rovnice je konečného typu. Konkrétně například na intervalu $(-\infty, \infty)$ platí

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t) = \frac{\pi}{2}$$

a tedy $|c - d| = \pi$, což znamená, že rovnice je konečného typu 1, speciálního druhu (viz klasifikace rovnic pomocí fází).

Příklad 3. Uvažujme rovnici

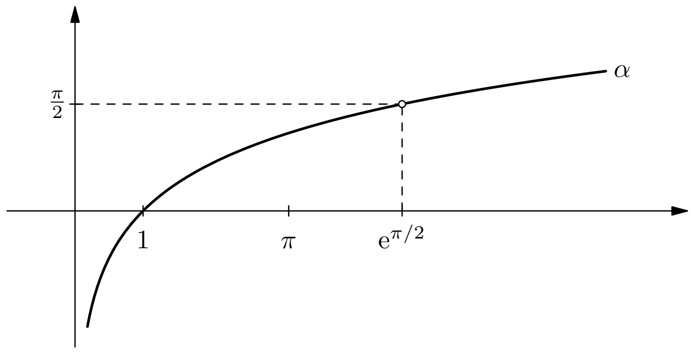
$$y'' = -\frac{5}{4t^2}y \quad \text{na} \quad j = (0, \infty)$$

a její řešení

$$u(t) = \sqrt{t}\sin\ln t, \qquad v(t) = \sqrt{t}\cos\ln t.$$

Dosazením do vztahu (2.1.3) ihned vypočteme, že

$$\alpha(t) = \ln t \quad \text{pro každé} \quad t \in j.$$



Obr. 5 První fáze α báze (u, v) rovnice $y'' = -\frac{5}{4t^2}y$

Z obrázku vidíme:

- $\alpha(t) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $\ln t = n\pi$, tj.

$$t = 1, e^{\pm\pi}, e^{\pm 2\pi}, \ldots$$

  a lze ověřit, že body $1, e^{\pm\pi}, e^{\pm 2\pi}, \ldots$ jsou nulovými body řešení u (vztah (2.1.2)).

- Vztah $\alpha(t) = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ je splněn pro každé

$$t = e^{\pm\frac{\pi}{2}}, e^{\pm\frac{3\pi}{2}}, \ldots$$

  a o těchto bodech lze ověřit, že jsou nulovými body řešení v (vztah (2.1.2)).

- α je funkce rostoucí ($w < 0$) a konkávní. Tedy vzdálenosti mezi nulovými body řešení se zvětšují.

- Ohraničenost fáze α a tudíž typ a druh rovnice (q) závisí na intervalu, na němž rovnici uvažujeme. Například na intervalu $(0, a)$, kde a je konečné, je rovnice vlevo oscilatorická, na intervalu $(0, \infty)$ se bude jednat o rovnici oboustranně oscilatorickou.

Poznámka. Z definice fáze i z předchozích úvah je zřejmé, že neznáme-li řešení rovnice (q), neznáme ani její fázi. V některých případech však můžeme znát jisté vlastnosti fáze, které nám pomohou určit některé vlastnosti řešení rovnice (q). Například z konkávnosti nebo konvexnosti fáze víme, zda se vzdálenosti mezi nulovými body řešení zvětšují nebo zmenšují; ohraničenost a monotonie fáze zase poskytuje informaci o typu rovnice.

Další vlastnosti fáze α

Ukázali jsme, že každé rovnici (q) s bází (u, v) lze přiřadit fázi α danou vztahem $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$. Otázkou zůstává, jak vypadají všechny funkce α, které lze považovat za fáze nějaké diferenciální rovnice (q). Odpověď dává následující věta.

Věta 2.1.4 *Každá funkce α definovaná na otevřeném intervalu j taková, že $\alpha \in C^3(j)$, $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$ je v intervalu j první fází rovnice (q) s nosičem*

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$$

a funkce

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \sin \alpha(t), \qquad v(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \cos \alpha(t)$$

jsou lineárně nezávislá řešení této rovnice.

Dále ukážeme, že existuje právě jedna první fáze splňující Cauchyovy počáteční podmínky. Této vlastnosti později využijeme v teorii transformací.

Věta 2.1.5 *Nechť $t_0 \in j$, X_0, $X_0' \neq 0$, X_0'' jsou libovolná čísla. Pak existuje právě jedna fáze α diferenciální rovnice (q) splňující v bodě t_0 Cauchyovy počáteční podmínky*

$$\alpha(t_0) = X_0, \qquad \alpha'(t_0) = X_0', \qquad \alpha''(t_0) = X_0''.$$

Tato fáze α patří do fázového systému báze (u, v) rovnice (q) pro

$$u(t) = (X_0' \cos X_0 - \frac{1}{2} \frac{X_0''}{X_0'} \sin X_0) u_0(t) + \sin X_0 \cdot v_0(t),$$

$$v(t) = -(X_0' \sin X_0 + \frac{1}{2} \frac{X_0''}{X_0'} \cos X_0) u_0(t) + \cos X_0 \cdot v_0(t),$$

kde u_0, v_0 jsou řešení diferenciální rovnice (q) určené počátečními podmínkami

$$u_0(t_0) = 0, \qquad u_0'(t_0) = 1, \qquad v_0(t_0) = 1, \qquad v_0'(t_0) = 0.$$

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 65–66.

2.2 Druhá fáze rovnice (q)

Definice 2.2.1 Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q) a nechť $q \neq 0$ na j.

Druhou fází báze (u, v) rozumíme libovolnou funkci β spojitou na intervalu j, která na tomto intervalu splňuje vztah

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{u'(t)}{v'(t)}$$

v každém bodě intervalu j, kromě nulových bodů funkce v'.

Druhou fází diferenciální rovnice (q) rozumíme druhou fázi libovolné báze rovnice (q).

Poznámka. Předpoklad $q \neq 0$ v definici druhé fáze zajišťuje, že nulové body derivací u', v' řešení u, v jsou na intervalu j izolované.

Vlastnosti druhé fáze β báze (u, v)

Nechť β je libovolná druhá fáze báze (u, v) rovnice (q) na intervalu j a w wronskián řešení u, v. Vlastnosti druhé fáze β uvedeme jen stručně, neboť jsou analogické vlastnostem první fáze α.

1. Vybereme-li libovolnou druhou fázi β, pak všechny druhé fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

$$\beta_n(t) = \beta(t) + n\pi, \qquad \text{kde} \qquad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

   Říkáme, že tvoří tzv. *druhý fázový systém* (β) báze (u, v).

2. Nechť $t_0 \in j$. Pak

$$u'(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \beta(t_0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.1}$$

$$v'(t_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \beta(t_0) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Vyjádření druhé fáze β:

   Nechť ξ'_0 je nulový bod řešení v', tj. $v'(\xi'_0) = 0$. Označme ξ'_n (ξ'_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$, n-tý nulový bod řešení v' následující (předcházející) bodu ξ'_0. Pak

$$\beta(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{u'(t)}{v'(t)} - n\pi \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t \in (\xi'_n, \xi'_{n+1}), \\ (\frac{\pi}{2} - n\pi) \operatorname{sgn} w & \text{pro} \quad t = \xi'_n. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

4. Derivací vztahu (2.2.2) dostáváme $\beta' = wq/(u'^2 + v'^2)$, tedy $\beta' \neq 0$. Dále víme, že $\beta' \in C^0$, neboť $q \in C^0$. Tedy $\beta \in C^1$. Pro každou druhou fázi β tedy platí

$$\beta \in C^1, \qquad \beta' \neq 0.$$

   Dále dostáváme: Je-li $qw > 0$, pak je druhá fáze β rostoucí funkce pro každé $t \in j$ a je-li $qw < 0$, pak je β klesající funkce pro každé $t \in j$.

5. Ohraničenost druhé fáze β závisí na typu a druhu rovnice (q) stejným způsobem jako fáze první.

Uveďme nyní vztah mezi druhou fází β a derivacemi u', v' řešení u, v rovnice (q). Jedná se o tvrzení analogická k Větě 2.1.2 a jejímu Důsledku. Uvedeme je již bez důkazů.

Věta 2.2.2 *Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q). Nechť ξ_0' je nulový bod řešení v', tj. $v'(\xi_0') = 0$. Označme ξ_n' (ξ_{-n}'), $n = 1, 2, \dots$, n-tý nulový bod řešení v' následující (předcházející) bodu ξ_0'. Pak existuje druhá fáze β báze (u, v) tak, že pro derivace u', v' řešení u, v platí*

$$u'(t) = \bar{\varepsilon}\frac{\sqrt{|wq(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\sin\beta(t), \qquad v'(t) = \bar{\varepsilon}\frac{\sqrt{|wq(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\cos\beta(t), \tag{2.2.3}$$

tj.

$$u'(t) = \bar{\varepsilon}s(t)\sin\beta(t), \qquad v'(t) = \bar{\varepsilon}s(t)\cos\beta(t), \tag{2.2.4}$$

kde $\bar{\varepsilon} = -\operatorname{sgn} v(\xi_0')$ a nazývá se signaturou zvolené druhé fáze β, $s(t)$ je druhá amplituda, q nosič rovnice (q) a w wronskián řešení u, v.

Poznámka. Vzhledem k předchozím vlastnostem druhé fáze β je zřejmé, že signatura $\bar{\varepsilon}$ druhé fáze β je jednoznačně dána volbou nulového bodu ξ_0' řešení v'.

Je-li $\bar{\varepsilon} = +1$, pak se druhá fáze nazývá *vlastní* a je-li $\bar{\varepsilon} = -1$, pak se druhá fáze nazývá *nevlastní*. Obdobně jako u prvních fází platí, že v uspořádání druhých fází

$$\dots < \beta_{-2} < \beta_{-1} < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$$

se vlastní a nevlastní fáze pravidelně střídají.

Důsledek 2.2.3 *Nechť β je druhá fáze báze (u, v). Pak derivaci y' libovolného řešení y rovnice (q) lze vyjádřit ve tvaru*

$$y'(t) = \pm k_1\frac{\sqrt{|q(t)|}}{\sqrt{|\beta'(t)|}}\sin(\beta(t) + k_2), \tag{2.2.5}$$

kde q je nosič rovnice (q) a k_1, k_2 libovolné konstanty, $k_1 \neq 0$, $0 \leq k_2 < \pi$. Znaménko $+$ nebo $-$ vezmeme podle toho, jsou-li signatury ε, $\bar{\varepsilon}$ (viz vztahy (2.1.6) a (2.2.3)) fází α, β báze (u, v) stejné nebo různé.

Vztah mezi první a druhou fází téže báze

Řada zajímavých vztahů existuje také mezi první fází α a druhou fází β téže báze. Této problematice se nebudeme podrobněji věnovat, jen pro ukázku uveďme následující vztahy:

1. Ze vzorců pro wronskián, první a druhou fázi (2.1.7), (2.2.4) a pro derivaci první a druhé fáze lze odvodit vztah
$$\frac{\alpha'\beta'}{\sin^2(\beta - \alpha)} = -q.$$
Z toho plyne, že je-li nosič $q < 0$, pak obě fáze α i β zároveň rostou nebo zároveň klesají a je-li nosič $q > 0$, pak jedna z fází α nebo β roste a druhá klesá.

Shrneme-li vztahy mezi nosičem q, wronskiánem w a monotonií fází α, β, dostáváme:

- Je-li $q < 0$ a $w < 0$, pak obě fáze α i β rostou v j.
- Je-li $q < 0$ a $w > 0$, pak obě fáze α i β klesají v j.
- Je-li $q > 0$ a $w < 0$, pak fáze α roste a β klesá.
- Je-li $q > 0$ a $w > 0$, pak fáze α klesá a β roste.

2. Hodnoty $\alpha(t)$, $\alpha(x)$ fáze α ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když t, x jsou 1-konjugované body.
   Hodnoty $\beta(t)$, $\beta(x)$ fáze β ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když t, x jsou 2-konjugované body.
   Hodnoty $\alpha(t)$, $\beta(x)$ fází α, β ve dvou bodech t, $x \in j$ se liší o násobek π právě tehdy, když x je 3-konjugovaný bod s bodem t a t je 4-konjugovaný bod s bodem x.

3. Dvě funkce α, β na otevřeném intervalu j s vlastnostmi

$$\alpha \in C^3, \qquad \beta \in C^1, \qquad \alpha' \neq 0,$$

   reprezentují první a druhou fázi báze (u, v) diferenciální rovnice (q) právě tehdy, když

$$\beta = \alpha + \text{Arccotan}\,\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\alpha'}\Big)', \tag{2.2.6}$$

   kde funkce „Arccotan" má obdobný význam jako funkce „Arctan" (viz (2.1.3), (2.1.4)).

Vztah mezi druhou fází a průvodní rovnicí $(\widehat{q})$

Nechť (u, v) je báze rovnice (q) a nechť pro nosič q rovnice (q) na intervalu j platí: $q \neq 0$, $q \in C^2$. Pak funkce

$$u_1 = \frac{u'}{\sqrt{|q|}}, \qquad v_1 = \frac{v'}{\sqrt{|q|}}$$

tvoří bázi rovnice $(\widehat{q})$, která je průvodní rovnicí k rovnici (q).

Ze vztahu $u'/v' = u_1/v_1$ plyne, že druhá fáze $\beta(t)$ báze (u, v) rovnice (q) je první fází báze (u_1, v_1) rovnice $(\widehat{q})$, a tedy pro nosič $\widehat{q}$ rovnice $(\widehat{q})$ platí

$$\widehat{q}(t) = -\{\operatorname{tg}\beta, t\}.$$

Pro nosič q rovnice (q) s bází (u, v) a první fází $\alpha(t)$ platí $q(t) = -\{\operatorname{tg}\alpha(t), t\}$. Pro nosič $\widehat{q}$ průvodní rovnice $(\widehat{q})$ s bází (u_1, v_1) a první fází $\beta(t)$ platí $\widehat{q}(t) = -\{\operatorname{tg}\beta(t), t\}$. Přitom $\beta(t)$ je zároveň druhou fází rovnice (q). Z těchto vztahů a ze spojitosti a ohraničenosti fází na intervalu j plyne následující věta:

Věta 2.2.4 *Rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$ mají stejný oscilatorický charakter, tj. jsou obě konečného typu nebo jsou oscilatorické stejného druhu.*

Důkaz.

Nechť β je druhá fáze báze (u, v) rovnice (q). Pak β je zároveň první fází α_1 báze (u_1, v_1) průvodní rovnice $(\widehat{q})$ rovnice (q).

Je-li (q) konečného typu, pak funkce β je ohraničená a tedy i funkce $\alpha_1 = \beta$ je ohraničená a tudíž je rovnice $(\widehat{q})$ konečného typu.

Je-li (q) nekonečného typu vlevo oscilatorická, pak funkce β je zdola neohraničená a shora ohraničená a fáze α_1 má stejné vlastnosti. Tedy rovnice $(\widehat{q})$ je také nekonečného typu vlevo oscilatorická.

Analogicky pro rovnice nekonečného typu vpravo oscilatorické a oboustranně oscilatorické.

2.3 Vztah mezi prvními fázemi dvou rovnic (q) a (Q)

Uvažujme dvě diferenciální rovnice v Jacobiho tvaru

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \quad j = (a, b), \; -\infty \le a < b \le \infty, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \quad Q \in C^0(J), \quad J = (A, B), \; -\infty \le A < B \le \infty \tag{Q}$$

a věnujme se vztahu mezi první fází α rovnice (q) a první fází $\mathcal{A}$ rovnice (Q).

Definice 2.3.1 První fáze α rovnice (q) a první fáze $\mathcal{A}$ rovnice (Q) se nazývají *podobné*, jestliže platí

$$\alpha(j) = \mathcal{A}(J).$$

Označíme-li

$$c = \lim_{t \to a^+} \alpha(t), \qquad d = \lim_{t \to b^-} \alpha(t), \qquad C = \lim_{T \to A^+} A(T), \qquad D = \lim_{T \to B^-} A(t),$$

pak platí, že první fáze α a $\mathcal{A}$ jsou podobné právě tehdy, když platí $c = C$, $d = D$ nebo $c = D$, $d = C$.

Je-li $c = C$, $d = D$, pak fáze α, $\mathcal{A}$ nazýváme *přímo podobné*, je-li $c = D$, $d = C$, mluvíme o *nepřímo podobných* fázích. Je jasné, že pro přímo podobné fáze platí $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \mathcal{A}' = 1$ a pro nepřímo podobné fáze $\operatorname{sgn} \alpha' \cdot \operatorname{sgn} \mathcal{A}' = -1$.

Tedy například, jsou-li obě rovnice (q), (Q) oscilatorické, pak každé dvě jejich fáze jsou podobné. Konkrétně jsou přímo podobné, jestliže obě fáze rostou nebo obě klesají a nepřímo podobné, jestliže jedna z fází roste a druhá klesá.

Obecně platí následující věta, kterou dále využijeme v teorii transformací.

Věta 2.3.2 *Pro diferenciální rovnice (q), (Q) existují podobné fáze právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu.*

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 100–101.

2.4 Algebraická struktura množiny fází oscilatorických rovnic (q) v intervalu $(-\infty, \infty)$

Z Věty 2.1.4 víme, že každá funkce α, kde $\alpha \in C^3(j)$ a $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$, je první fází rovnice (q) s nosičem $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$. Dále víme, že v případě oscilatorické rovnice je funkce α neohraničená.

Tento odstavec bude věnován stručnému naznačení některých výsledků, jež O. Borůvka dosáhl ve studiu algebraické struktury množiny všech funkcí α definovaných na intervalu $j = (-\infty, \infty)$, pro něž platí že, $\alpha \in C^3(j)$, $\alpha'(t) \neq 0$ pro každé $t \in j$ a α je neohraničená na intervalu j. Jinými slovy, budeme se věnovat studiu fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$.

Grupa fází $\mathcal{G}$

Nechť $\mathcal{G}$ značí množinu všech fází oscilatorických diferenciálních rovnic (q) definovaných v intervalu $j = (-\infty, \infty)$. Definujme na této množině operaci „skládání" takto: Pro každé $\alpha, \gamma \in \mathcal{G}$ platí

$$(\alpha\gamma)(t) = \alpha(\gamma(t)) \qquad \text{pro každé} \quad t \in j.$$

Pak $\mathcal{G}$ spolu s touto operací tvoří grupu s jednotkovým prvkem $\varepsilon(t) = t$ (speciální fáze). Funkce α^{-1} značí prvek inverzní k prvku $\alpha \in \mathcal{G}$. Tuto grupu nazveme *grupa fází*.

Každá funkce $\alpha \in \mathcal{G}$ je první fází oscilatorické diferenciální rovnice (q) na intervalu $j = (-\infty, \infty)$, jejíž nosič je dán vztahem

$$q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t). \tag{2.4.1}$$

Naopak každá první fáze α libovolné oscilatorické rovnice (q) v intervalu $j = (-\infty, \infty)$ je prvkem grupy $\mathcal{G}$.

Víme, že je-li $\alpha \in \mathcal{G}$ rostoucí (klesající) funkce, pak také $\alpha^{-1} \in \mathcal{G}$ je rostoucí (klesající) funkce a dále $\alpha\gamma$ je rostoucí funkce, jestliže jsou obě fáze α i γ rostoucí nebo obě klesající a $\alpha\gamma$ je klesající, jestliže je jedna z fází α, γ rostoucí a druhá klesající.

Z toho okamžitě plyne, že množina $\mathcal{N}$ tvořená všemi rostoucími fázemi tvoří podgrupu grupy $\mathcal{G}$. Tato podgrupa $\mathcal{N}$ je v grupě $\mathcal{G}$ invariantní (normální), tj. platí

$$\alpha^{-1}\mathcal{N}\alpha = \mathcal{N} \qquad \text{pro každé} \quad \alpha \in \mathcal{G},$$

což znamená, že pro každý prvek $\gamma \in \mathcal{N}$ a $\alpha \in \mathcal{G}$ platí $\alpha^{-1}\gamma\alpha \in \mathcal{N}$.

Relace ekvivalence

V grupě $\mathcal{G}$ definujeme ekvivalenci takto:

Dvě fáze $\alpha, \gamma \in \mathcal{G}$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když při vhodných konstantách c_{ik} $(i, k = 1, 2)$, za předpokladu, že determinant $|c_{ik}| \neq 0$, platí

$$\operatorname{tg}\gamma(t) = \frac{c_{11}\operatorname{tg}\alpha(t) + c_{12}}{c_{21}\operatorname{tg}\alpha(t) + c_{22}}, \tag{2.4.2}$$

a to pro všechna $t \in j$ s výjimkou bodů, v nichž dané funkce nejsou definovány.

Snadno ověříme, že relace daná vztahem (2.4.2) je reflexivní, symetrická a transitivní, tedy je relací ekvivalence. Označme tuto relaci Q.

Pomocí relace ekvivalence Q je možno vytvořit rozklad $\overline{Q}$ grupy $\mathcal{G}$ příslušný této ekvivalenci. Připomeňme, že do každé třídy rozkladu $\overline{Q}$ náleží ty fáze, jež jsou vzájemně ekvivalentní a žádné dvě fáze náležící do různých tříd rozkladu nemohou být vzájemně ekvivalentní.

Lze dokázat, že prvky grupy $\mathcal{G}$ ležící v jedné a téže třídě $\overline{a} \in \overline{Q}$ jsou právě všechny fáze jisté diferenciální rovnice (q). Nosič q této rovnice je dán vztahem (2.4.1), v němž za fázi α můžeme zvolit kteroukoliv fázi $\alpha \in \overline{a}$.

Vidíme tedy, že existuje prostá korespondence mezi nosiči q oscilatorických diferenciálních rovnic (q) v intervalu $j = (-\infty, \infty)$ a jednotlivými třídami rozkladu $\overline{Q}$.

Všimneme-li si velikostí uvažovaných množin, dojdeme k závěru, že množina $\overline{a}$ všech prvních fází příslušných k nosiči $q(t)$ má mohutnost kontinua.

Fundamentální podgrupa $\mathcal{F}$

Všechny fáze grupy $\mathcal{G}$ ekvivalentní s jednotkovým prvkem grupy $\mathcal{G}$ tvoří tzv. *fundamentální podgrupu* $\mathcal{F}$ grupy $\mathcal{G}$. Tato podgrupa $\mathcal{F}$ se skládá právě ze všech fází diferenciální rovnice $y'' = -y$.

Lze ukázat, že rozklad $\overline{Q}$ splývá s rozkladem v pravé třídy grupy $\mathcal{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathcal{F}$:

$$\overline{Q} = \mathcal{G}/_p\mathcal{F},$$

tj. uvažujeme-li třídu rozkladu $\overline{a} \in \overline{Q}$ a libovolnou fázi α náležící této třídě $\alpha \in \overline{a}$, pak $\overline{a} = \mathcal{F}\alpha$.

Podgrupa elementárních fází $\mathcal{H}$

Každá fáze α, pro niž platí

$$\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \mathrm{sgn}\, \alpha', \qquad t \in j$$

se nazývá *elementární fáze*. Nechť $\mathcal{H}$ značí množinu všech elementárních fází.

Snadno se ukáže, že jednotkový prvek $\varepsilon(t) = t$ grupy $\mathcal{G}$ je elementární fáze, že složení dvou elementárních fází je opět elementární fáze a že inverzní prvek k prvku $\alpha \in \mathcal{H}$ je také elementární fází. Tedy platí, že množina všech elementárních fází $\mathcal{H}$ je podgrupa grupy všech fází $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

Dále lze dokázat, že všechny fáze ekvivalentní s elementární fází $\varepsilon(t) = t$ jsou také elementární a tedy platí, že fundamentální podgrupa $\mathcal{F}$ je tvořena pouze elementárními fázemi a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Celkem tedy dostáváme

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}.$$

3 Teorie dispersí

V této kapitole se seznámíme s teorií jistých funkcí jedné proměnné, které udávají vztah mezi nulovými body řešení oscilatorických rovnic (q) a (Q). Takové funkce nazveme dispersemi.

Nejprve budeme zkoumat tzv. centrální disperse 1. až 4. druhu oscilatorické rovnice (q) s nosičem $q < 0$, které zavedeme pomocí konjugovaných bodů rovnice (q).

V druhé části teorie dispersí zavedeme tzv. obecné disperse, které popisují vztahy mezi nulovými body dvou oscilatorických rovnic (q) a (Q).

Mimo jiné uvedeme vztahy mezi centrálními dispersemi a fázemi, mezi obecnými dispersemi a fázemi a ukážeme, že centrální i obecné disperse jsou řešením jisté nelineární diferenciální rovnice 3. řádu a hrají důležitou roli v teorii transformací oscilatorických rovnic.

3.1 Centrální disperse

Pojem centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu zavedeme pouze pro rovnice (q) oscilatorické v intervalu j. V takovém případě mají všechna řešení rovnice (q) nekonečně mnoho nulových bodů, jejichž hromadnými body jsou koncové body intervalu j. Dále budeme předpokládat, že $q < 0$ pro každé $t \in j$. Předpoklad $q < 0$ není nutný u centrálních dispersí 1. druhu. Všude, kde budeme mluvit o rovnici průvodní, budeme uvažovat $q \in C^2$.

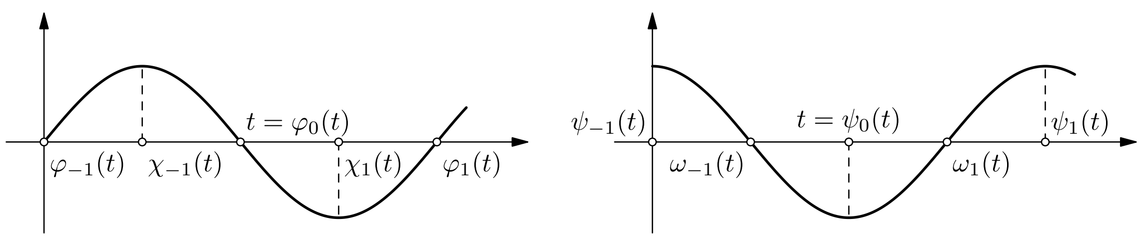
Definice 3.1.1 Nechť rovnice (q) je oscilatorická na intervalu j a pro nosič q platí $q(t) < 0$ pro každé $t \in j$.

V intervalu j definujeme funkci φ_n (φ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\varphi_n(t)$ ($\varphi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 1-konjugovaný bod s bodem t a nechť $\varphi_0(t) = t$. Funkci φ_n (φ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 1. druhu*. Funkci φ_1 nazýváme *základní centrální disperse 1. druhu.*

V intervalu j definujeme funkci ψ_n (ψ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\psi_n(t)$ ($\psi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 2-konjugovaný bod s bodem t a nechť $\psi_0(t) = t$. Funkci ψ_n (ψ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 2. druhu*. Funkci ψ_1 nazýváme *základní centrální disperse 2. druhu.*

V intervalu j definujeme funkci χ_n (χ_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\chi_n(t)$ ($\chi_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 3-konjugovaný bod s bodem t. Funkci χ_n (χ_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 3. druhu*. Funkci χ_1 nazýváme *základní centrální disperse 3. druhu.*

V intervalu j definujeme funkci ω_n (ω_{-n}), $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, takto: Nechť pro $t \in j$ je $\omega_n(t)$ ($\omega_{-n}(t)$) n-tý pravý (levý) 4-konjugovaný bod s bodem t. Funkci ω_n (ω_{-n}) nazýváme *n-tá (-n-tá) centrální disperse 4. druhu*. Funkci ω_1 nazýváme *základní centrální disperse 4. druhu.*



Obr. 6 Centrální disperse

Z předchozího obrázku vidíme, že pro každý bod $t \in j$ platí následující nerovnosti:

$$\cdots < \chi_{-2}(t) < \varphi_{-1}(t) < \chi_{-1}(t) < t = \varphi_0(t) < \chi_1(t) < \varphi_1(t) < \chi_2(t) < \cdots ,$$

$$\cdots < \omega_{-2}(t) < \psi_{-1}(t) < \omega_{-1}(t) < t = \psi_0(t) < \omega_1(t) < \psi_1(t) < \omega_2(t) < \cdots .$$

Poznámka. Centrální disperse jsme definovali pouze pro rovnice oscilatorické s nosičem $q < 0$. Předchozí definici však lze rozšířit i pro rovnice neoscilatorické, které mají k-konjugované body, kde $k = 1, 2, 3, 4$. Označíme-li $j_{k,n}$ ($i_{k,n}$) otevřené podintervaly intervalu j těch bodů $t \in j$, k nimž existují n-té pravé (levé) k-konjugované body ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), pak lze definici centrálních dispersí zúžit pouze na tyto podintervaly.

Je zřejmé, že je-li diferenciální rovnice vpravo (vlevo) oscilatorická, pak všechny intervaly $j_{k,n}$ ($i_{k,n}$) se shodují s intervalem j. Dále, je-li rovnice oboustranně oscilatorická, pak se všechny intervaly $i_{k,n}$, $j_{k,n}$ shodují s j.

3.1.1 Některé vlastnosti centrálních dispersí

Uvažujme oscilatorickou rovnici (q) v intervalu j s nosičem q, $q(t) < 0$ pro každé $t \in j$, a bází (u, v). Pak platí:

1. Každá centrální disperse je v intervalu j spojitá a rostoucí funkce.

2. Obor hodnot každé centrální disperse je interval j.

3. Je-li nosič q rovnice (q) třídy C^k ($k = 0, 1, \dots$), pak všechny centrální disperse 1. druhu jsou třídy C^{k+3} a všechny centrální disperse 2., 3. a 4. druhu třídy C^{k+1}.

4. Z Věty 1.5.2 okamžitě plyne, že pro libovolnou bázi (u, v) rovnice (q) a libovolný bod $t \in j$ platí:

$$u(t)v(\varphi_n(t)) = v(t)u(\varphi_n(t)), \qquad u'(t)v'(\psi_n(t)) = v'(t)u'(\psi_n(t)), \tag{3.1.1}$$

$$u(t)v'(\chi_m(t)) = v(t)u'(\chi_m(t)), \qquad u'(t)v(\omega_m(t)) = v'(t)u(\omega_m(t)),$$

   $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Tyto vztahy nazýváme *funkcionální rovnice centrálních dispersí.*

5. Nechť $q \in C^2$. Pak existuje průvodní rovnice $(\widehat{q})$ k rovnici (q) a platí, že libovolná n-tá centrální disperse 2. druhu rovnice (q) je n-tou centrální dispersí 1. druhu průvodní rovnice $(\widehat{q})$.

Důkazy těchto tvrzení lze nalézt v [25], str. 118–122.

Derivace centrálních dispersí

V dalším textu budeme pracovat nejen s centrálními dispersemi, ale i s jejich derivacemi. Ukážeme některé vztahy pro první derivaci centrálních dispersí 1. druhu. Z úsporných důvodů nebudeme uvádět vztahy pro derivace centrálních dispersí ostatních druhů, které lze odvodit obdobným způsobem.

Nechť (u, v) je libovolná báze rovnice (q), φ_n její n-tá centrální disperse 1. druhu a $t \in j$. Pak první derivaci φ_n' lze vyjádřit pomocí:

a) lineárně nezávislých řešení u, v a jejich derivací u', v'

$$\varphi_n'(t) = \frac{u(\varphi_n(t))v'(t) - u'(t)v(\varphi_n(t))}{u'(\varphi_n(t))v(t) - u(t)v'(\varphi_n(t))}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.2}$$

b) řešení u a jeho derivace u'

$$\varphi_n'(t) = \begin{cases} \frac{u^2(\varphi_n(t))}{u^2(t)} & \text{pro} \quad t \in j, \quad \text{pro něž} \quad u(t) \neq 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \frac{u'^2(t)}{u'^2(\varphi(t))} & \text{pro} \quad t \in j, \quad \text{pro něž} \quad u(t) = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{3.1.3}$$

c) první amplitudy r báze (u, v)

$$\varphi_n'(t) = \frac{r^2(\varphi_n(t))}{r^2(t)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.4}$$

d) první fáze α rovnice (q)

$$\varphi_n'(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha'(\varphi_n(t))}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.1.5}$$

e) nosiče q rovnice (q)

$$\varphi_n'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} \cdot \frac{q(t_5)}{q(t_7)} \cdots \frac{q(t_{4n-3})}{q(t_{4n-1})}, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3.1.6}$$

kde $t_1, \dots, t_{4n}$ jsou vhodná čísla taková, že $\varphi_{k-1}(t) < t_{4k-3} < \chi_k(t) < t_{4k-1} < \varphi_k(t)$ a $\psi_{k-1}(t) < t_{4k-2} < \omega_k(t) < t_{4k} < \psi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $t_0 = t$.

Důkaz.

Naznačme odvození vztahů (3.1.2) až (3.1.4). Důkazy dalších dvou vztahů lze nalézt v [25], str. 123 – 125 a 127.

Vztah (3.1.2) dostaneme okamžitě derivací prvního ze vztahů (3.1.1).

Při důkazu vztahu (3.1.3) lze postupovat takto: Vyjděme ze vztahu (3.1.2) a pokusme se z něj eliminovat řešení v a v'. Je-li $u(t) \neq 0$ vynásobíme čitatele i jmenovatele této rovnice výrazem $u(t) \cdot u(\varphi(t))$ a k jejich úpravě využijeme vztahu (3.1.1). Tedy

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))(v'(t)u(t) - u'(t)v(t))}{u^2(t)(u'(\varphi(t))v(\varphi(t)) - u(\varphi(t))v'(\varphi(t)))}.$$

Dělením wronskiánem w, pro nějž zřejmě $w(t) = w(\varphi(t))$, dostáváme

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))}{u^2(t)} \quad \text{pro} \quad t \in j, \text{pro něž je} \quad u(t) \neq 0.$$

Je-li $u(t) = 0$, vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem $u'(t) \cdot u'(\varphi(t))$, který je určitě různý od nuly a po úpravě obdržíme výsledný vztah

$$\varphi'(t) = \frac{u'^2(t)}{u'^2(\varphi(t))} \quad \text{pro} \quad t \in j, \text{pro něž je} \quad u(t) = 0.$$

Při odvození vztahu (3.1.4) lze postupovat takto: Předpokládejme, že $u(t) \neq 0$ (v důsledku lineární nezávislosti řešení u, v musí být vždy jedna z hodnot $u(t)$, $v(t)$ různá od nuly), vyjděme ze vztahu (3.1.3) a použijme následující úpravy

$$\varphi'(t) = \frac{u^2(\varphi(t))}{u^2(t)} = \frac{u^2(\varphi(t))(u^2(t) + v^2(t))}{u^2(t)(u^2(\varphi(t)) + v^2(\varphi(t)))} \cdot \frac{u^2(\varphi(t)) + v^2(\varphi(t))}{u^2(t) + v^2(t)} = \frac{1 + \frac{v^2(t)}{u^2(t)}}{1 + \frac{v^2(\varphi(t))}{u^2(\varphi(t))}} \cdot \frac{u^2(\varphi(t)) + v^2(\varphi(t))}{u^2(t) + v^2(t)}.$$

S využitím vztahu (3.1.1) a definice první amplitudy dostaneme okamžitě dokazované tvrzení.

3.1.2 Vztah mezi centrálními dispersemi a fázemi

V tomto odstavci uvedeme tzv. Abelovy funkcionální rovnice, jež udávají souvislost mezi centrálními dispersemi a fázemi.

Věta 3.1.2 *Nechť α a β jsou první a druhá fáze báze (u,v) diferenciální rovnice (q) takové, že $0 < |\beta - \alpha| < \pi$. Dále nechť φ_n, ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$) jsou centrální disperse dané v Definici 3.1.1. Pak pro všechna $t \in j$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ platí*

$$\alpha(\varphi_n(t)) = \alpha(t) + \varepsilon n \pi, \tag{3.1.7}$$

$$\beta(\psi_n(t)) = \beta(t) + \varepsilon n \pi,$$

$$\alpha(\omega_m(t)) = \beta(t) + \frac{1}{2}((2m - \operatorname{sgn} m)\varepsilon \mp 1)\pi,$$

$$\beta(\chi_m(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{2}((2m - \operatorname{sgn} m)\varepsilon \pm 1)\pi,$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$. První znaménko platí pro případ $0 < \beta - \alpha < \pi$ a druhé znaménko pro případ $-\pi < \beta - \alpha < 0$.

Výše uvedené rovnice se nazývají Abelovy funkcionální rovnice pro centrální disperse.

Důkaz.

1. Nejprve vysvětleme podmínku omezující výběr fází α, β, tj. podmínku $0 < |\beta - \alpha| < \pi$: Dosazením vztahů (2.1.7) a (2.2.4) do wronskiánu $w = uv' - u'v$ dostáváme

$$r \cdot s \cdot \sin(\beta - \alpha) = \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon}(-w).$$

Protože je pravá strana této rovnice všude nenulová, existuje celé číslo n takové, že

$$n\pi < \beta - \alpha < (n+1)\pi.$$

Připomeňme, že všechny první a druhé fáze příslušné k bázi (u, v) jsou tvaru

$$\alpha_n = \alpha + n\pi, \qquad \beta_n = \beta + n\pi, \qquad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \ldots .$$

Zvolíme-li nyní α_0, β_0 tak, že $\alpha_0 < \beta_0$, pak lze ostatní fáze $\alpha_n \in (\alpha_0)$, $\beta_n \in (\beta_0)$ uspořádat do tzv. smíšeného fázového systému

$$\cdots < \alpha_{-1} < \beta_{-1} < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots .$$

Pak pro dvě sousední fáze α_k, β_k, resp. β_k, α_{k+1} platí

$$0 < \beta_k - \alpha_k < \pi, \quad \text{resp.} \quad -\pi < \beta_k - \alpha_{k+1} < 0.$$

Zmíněná podmínka tedy znamená, že α a β jsou dvě „sousední“ fáze smíšeného fázového systému.

2. Nyní provedeme vlastní odvození rovnice (3.1.7).

   Z předpokladu $q < 0$ (platí v celé 3. kapitole) plyne, že fáze α, β jsou zároveň rostoucí nebo zároveň klesající, tj. $\operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta' \neq 0$. Označme $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha' = \operatorname{sgn} \beta'$.

   Uvažujme libovolný pevný bod $x \in j$ a takové řešení y rovnice (q), pro které platí $y(x) = 0$. Ze vztahů (2.1.9) a (2.2.5) plyne:

$$y(t) = k \cdot r(t) \cdot \sin[\alpha(t) - \alpha(x)] \tag{3.1.8}$$

$$y'(t) = \pm k \cdot s(t) \cdot \sin[\beta(t) - \alpha(x)], \tag{3.1.9}$$

kde $k \neq 0$ je vhodná konstanta, $r(t)$ první amplituda a $s(t)$ druhá amplituda.

Pro zjednodušení položme

$$A(t) = \alpha(t) - \alpha(x). \tag{3.1.10}$$

Zřejmě $A(x) = 0$. Z předpokladu oscilatoričnosti rovnice (q) plyne, že α je neohraničená. Je-li $\varepsilon = 1$, tj. α je rostoucí, pak $\lim_{t \to +\infty} A(t) = +\infty$. Je-li $\varepsilon = -1$, tj. α je klesající, pak $\lim_{t \to +\infty} A(t) = -\infty$.

Vzhledem ke spojitosti a neohraničenosti funkce A v intervalu j existuje ke každému $n \in \mathbb{N}$ číslo x_1 ($x_1 > x$) takové, že $A(x_1) = \varepsilon n\pi$. Dosazením do vztahu (3.1.8) dostaneme, že x_1 je nulový bod řešení y. Ze vztahu (3.1.10) plyne

$$\alpha(x_1) - \alpha(x) = \varepsilon n\pi. \tag{3.1.11}$$

Tedy pro $\varepsilon = 1$ je x_1 pravý n-tý 1-konjugovaný bod s bodem x, tj. $x_1 = \varphi_n(x)$. Obdobně pro $\varepsilon = -1$ dostaneme $x_1 = \varphi_{-n}(x)$.

Dosazením $x_1 = \varphi_n(x)$ do vztahu (3.1.11) okamžitě plyne

$$\alpha(\varphi_n(x)) = \alpha(x) + \varepsilon n\pi.$$

Obdobně za použití vztahu (3.1.9) můžeme uvažovat funkci $B(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ a analogicky dojdeme k rovnici pro centrální dispersi χ_m. Jestliže v rovnici (3.1.8) zvolíme místo konstanty $\alpha(x)$ konstantu $\beta(x)$, tj. $y(t) = k \cdot r(t) \cdot \sin[\alpha(t) - \beta(x)]$, dojdeme k rovnici pro centrální dispersi ω_m a obdobně, uvažujeme-li rovnici (3.1.9) ve tvaru $y'(t) = \pm k \cdot s(t) \cdot \sin[\beta(t) - \beta(x)]$, dojdeme k rovnici pro centrální dispersi ψ_n.

3.1.3 Diferenciální rovnice pro centrální disperse

V tomto odstavci ukážeme, že centrální disperse oscilatorických rovnic jsou řešením jisté nelineární diferenciální rovnice 3. řádu. Tento výsledek hraje významnou roli především v teorii transformací.

Věta 3.1.3 *Všechny centrální disperse 1. druhu φ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) rovnice (q) s nosičem q splňují v intervalu j nelineární diferenciální rovnici 3. řádu*

$$-\{\varphi_n, t\} + q(\varphi_n){\varphi_n'}^2 = q(t). \tag{qq}$$

Dále, je-li $q \in C^2$, pak všechny centrální disperse ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$) 2., 3. a 4. druhu splňují v intervalu j rovnice

$$-\{\psi_n, t\} + \widehat{q}(\psi_n){\psi_n'}^2 = \widehat{q}(t), \tag{$\widehat{q}\widehat{q}$}$$

$$-\{\chi_m, t\} + \widehat{q}(\chi_m){\chi_m'}^2 = q(t), \tag{$\widehat{q}q$}$$

$$-\{\omega_m, t\} + q(\omega_m){\omega_m'}^2 = \widehat{q}(t), \tag{$q\widehat{q}$}$$

kde q je nosič rovnice (q) a $\widehat{q}$ nosič rovnice průvodní $(\widehat{q})$ k rovnici (q). Tyto rovnice se nazývají nelineární diferenciální rovnice 3. řádu pro centrální disperse.

Důkaz.

Nechť $t \in j$ libovolně. Schwarzovskou derivací (viz Věta 1.3.1) Abelovy funkcionální rovnice pro centrální dispersi 1. druhu $\alpha(\varphi_n(t)) = \alpha(t) + \varepsilon n\pi$ (3.1.2) získáme

$$\{\alpha, \varphi_n(t)\} \cdot {\varphi_n'}^2(t) + \{\varphi_n, t\} = \{\alpha, t\}.$$

Dále využitím vztahu $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$ (2.1.8) dostaneme

$$(q(\varphi_n) + \alpha'^2(\varphi_n)) \cdot \varphi_n'^2(t) - \{\varphi_n, t\} = q(t) + \alpha'^2(t),$$

odkud

$$q(t) = q(\varphi_n) \cdot {\varphi_n'}^2 - \{\varphi_n, t\},$$

neboť $\alpha'^2(\varphi_n)\varphi_n'^2(t) = \alpha'^2(t)$ (dostaneme ihned derivací vztahu (3.1.2)).

Obdobně postupujeme při odvozování rovnic pro ostatní centrální disperse.

3.1.4 Algebraická struktura množiny centrálních dispersí

Mezi centrálními dispersemi jednoho i různých druhů existuje mnoho vzájemných vztahů vyplývajících ze skládání těchto funkcí. V tomto odstavci naznačíme některé výsledky, k nimž O. Borůvka při zkoumání těchto vztahů dospěl. Přitom budeme používat následující označení:

Pro dvě funkce f, g definované v intervalu j značí fg skládání funkcí ve smyslu

$$(fg)(t) = f(g(t)).$$

Dále nechť f^{-1} značí funkci inverzní k funkci f (pokud existuje), f^n složenou funkci $ff \cdots f$ počítáno n-krát, f^{-n} složenou funkci $f^{-1}f^{-1} \cdots f^{-1}$ počítáno n-krát a konečně $f^0(t) = t$.

Nechť Φ, Ψ, χ, Ω značí množiny všech centrálních dispersí 1., 2., 3. a 4. druhu. Schématicky jsou vztahy vyplývající ze skládání centrálních dispersí různých druhů znázorněny v následující tabulce, jejíž význam je následující: Složením dvou centrálních dispersí $a \in A$, $b \in B$ (A, B značí jednu z množin Φ, Ψ, χ, Ω) vznikne funkce, která není centrální dispersí nebo je centrální dispersí ab z množiny C, která se nachází v průsečíku řádku A a sloupce B, tj. $ab \in C$. Například složením dvou centrálních dispersí 1. druhu dostaneme zase centrální dispersi 1. druhu, konkrétně platí $\varphi_r \varphi_s = \varphi_{r+s}$, složením centrální disperse 1. druhu s centrální dispersí 2. druhu dostaneme funkci, která není centrální dispersí žádného druhu, složením centrální disperse 4. druhu s centrální dispersí 3. druhu dostaneme centrální dispersi 1. druhu, atd.

	Φ	Ψ	χ	Ω
Φ	Φ	–	–	Ω
Ψ	–	Ψ	χ	–
χ	χ	–	–	Ψ
Ω	–	Ω	Φ	–

Tab. 1 Skládání centrálních dispersí

Grupa centrálních dispersí 1. druhu $\mathcal{C}$

Všimněme si nyní chování centrálních dispersí 1. druhu. Přímo z definice centrálních dispersí plynou následující vztahy

$$\varphi_n \varphi_{-n} = t, \quad \varphi_n = \varphi_1^n, \quad \varphi_{-n} = \varphi_{-1}^n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Tedy ke každé centrální dispersi 1. druhu existuje funkce inverzní a všechny její hodnoty se dají vyjádřit pomocí základní centrální disperse φ_1 a funkce k ní inverzní φ_{-1}.

Z těchto vztahů tedy plyne, že množina Φ všech centrálních dispersí 1. druhu tvoří spolu s operací skládání nekonečnou cyklickou grupu generovanou prvkem φ_1. Označme ji $\mathcal{C}$. Neutrálním (jednotkovým) prvkem této grupy je identita $\varphi_0 = t$ a ke každému prvku φ_k je prvek φ_{-k} prvkem inverzním. Lze také dokázat, že všechny centrální disperse 1. druhu se sudými indexy tvoří v této grupě podgrupu $\mathcal{S}$. Tedy

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{C}.$$

K obdobnému závěru lze dospět také v případě množiny Ψ centrálních dispersí 2. druhu.

Poznámka. V souvislosti s centrálními dispersemi řeší O. Borůvka v monografii [25] řadu otázek z teorie oscilatorických rovnic v Jacobiho tvaru, například určení všech rovnic (q) s předepsanou základní centrální dispersí libovolného druhu, zkoumání rovnic (q) se stejnou základní centrální dispersí 1. druhu nebo rovnic (q), které mají stejnou základní centrální dispersi 1. a 2. druhu a rovnic, které mají stejnou základní centrální dispersi 3. a 4. druhu.

Centrální disperse pomáhají v řešení otázek globálního charakteru hlavně tím, že popisují vztahy mezi řešeními nebo derivacemi řešení v konjugovaných bodech těchto řešení.

Poznámka. (Jiný pohled na centrální disperse)
Centrální dispersi 1. druhu jsme definovali jako funkci, která bodu $t \in j$ přiřadí jistý 1-konjugovaný bod s bodem t. Neboli, nulovému bodu nějakého řešení u rovnice (q) přiřadí jiný nulový bod téhož řešení u. Obdobně 2-centrální dispersi jsme definovali jako funkci, která bodu $t \in j$ přiřadí jistý 2-konjugovaný bod s bodem t, neboli nulovému bodu řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$ přiřadí nulový bod řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$. Analogicky 3-centrální disperse je funkce, která nulovému bodu řešení u rovnice (q) přiřadí nulový bod řešení $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ rovnice $(\widehat{q})$ a 4-centrální disperse funkce, která nulovému bodu řešení $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ rovnice $(\widehat{q})$ přiřadí nulový bod řešení u rovnice (q).

Můžeme tedy říci, že se jedná o zobrazení mezi nulovými body řešení jedné rovnice a nulovými body řešení rovnice druhé. U centrálních dispersí jsou těmito rovnicemi rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$. V obecném případě však můžeme uvažovat zobrazení mezi nulovými body řešení dvou libovolných rovnic (q), (Q). Takové zobrazení zavedeme v následujícím odstavci a nazveme ho obecnou dispersí.

3.2 Obecné disperse

Obecnou dispersí budeme rozumět funkci jedné proměnné, která bude udávat souvislost mezi nulovými body řešení rovnice (q) a nulovými body řešení rovnice (Q).

Nechť rovnice (q) je oscilatorická na intervalu $j = (a, b)$ a nechť (u, v) značí její bázi, w wronskián řešení u, v a r lineární prostor řešení rovnice (q).

Dále nechť rovnice (Q) je oscilatorická na intervalu $J = (A, B)$ a nechť (U, V) značí její bázi, W wronskián řešení U, V a R lineární prostor řešení rovnice (Q).

Definice 3.2.1 Nechť $p : r \to R$ je lineární zobrazení takové, že obrazem každého řešení $y \in r$ daného vztahem $y = c_1u + c_2v$ je řešení $Y \in R$ dané vztahem $Y = c_1U + c_2V$ se stejnými konstantami c_1, c_2. Píšeme $Y = py$.

Lineární zobrazení $p : r \to R$ se nazývá *normalizované vzhledem k bodům* t_0*,* T_0 (v tomto pořadí), jestliže zobrazí každé řešení $y \in r$ rovnice (q), které prochází bodem t_0 na řešení Y rovnice (Q), které prochází bodem T_0, tj. jestliže $y(t_0) = 0$, pak $(py)(T_0) = Y(T_0) = 0$.

Poznamenejme, že ke každému zobrazení $p : r \to R$ existuje inverzní zobrazení $p^{-1} : R \to r$ takové, že každé řešení $Y \in R$ dané vztahem $Y = C_1U + C_2V$ zobrazí na řešení $y \in r$ dané vztahem $y = C_1u + C_2v$ se stejnými konstantami C_1, C_2. Píšeme $y = p^{-1}Y$.

Nyní můžeme definovat obecnou dispersi rovnic (q), (Q).

Definice 3.2.2 Buď dáno $t_0 \in j$ a $T_0 \in J$ libovolně. Označme t_n n-té 1-konjugované body s bodem t_0 rovnice (q) a T_n n-té 1-konjugované body s bodem T_0 rovnice (Q) $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$. Dále nechť $p : r \to R$ je zobrazení normalizované vzhledem k bodům t_0, T_0.

Nechť $t \in j$ libovolně a y je řešení rovnice (q) procházející bodem t. Pak definujeme hodnotu $X(t)$ funkce X v bodě t takto:

Je-li $w/W > 0$ pak $X(t)$ je takový nulový bod řešení py rovnice (Q), že je-li $t \in (t_n, t_{n+1})$, pak $X(t) \in (T_n, T_{n+1})$ a $X(t_n) = T_n$.

Je-li $w/W < 0$ pak $X(t)$ je takový nulový bod řešení py rovnice (Q), že je-li $t \in (t_n, t_{n+1})$, pak $X(t) \in (T_{-n-1}, T_{-n})$ a $X(t_n) = T_{-n}$.

Funkce X, jež je definována na intervalu j, se nazývá *obecná disperse rovnic* (q), (Q) (v tomto pořadí) *vzhledem k bodům* t_0, T_0 *a lineárnímu zobrazení* p, stručně *obecná disperse rovnic* (q), (Q). Čísla t_0, T_0 nazýváme *počáteční body* a lineární zobrazení p *generátor obecné disperse* X.

V teorii obecných dispersí hraje velmi důležitou roli následující věta, jež vyjadřuje obecnou dispersi pomocí fází rovnic (q) a (Q).

Věta 3.2.3 *Nechť X je obecná disperse rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Dále nechť α je libovolná fáze báze (u, v) rovnice (q) taková, že $\alpha(t_0) = 0$ a $\mathcal{A}$ libovolná fáze báze (U, V) rovnice (Q) taková, že $\mathcal{A}(T_0) = 0$. Pak obecná disperse X splňuje v intervalu j funkcionální rovnici*

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)), \tag{3.2.1}$$

tj. pro obecnou dispersi platí

$$X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t)), \tag{3.2.2}$$

kde $\mathcal{A}^{-1}$ značí inverzní funkci k funkci $\mathcal{A}$.

Důkaz.
Důkaz lze nalézt v [25], str. 174–176.

Z rovnice (3.2.2) vidíme, že vlastnosti obecných dispersí lze obdržet z vlastností prvních fází rovnic (q), (Q). Zejména platí

1. $$X(j) = J, \qquad X \in C^3, \qquad X' \neq 0.$$

2. Je-li $w/W > 0$, pak X roste v intervalu j od A k B, je-li $w/W < 0$, pak X klesá v intervalu j od B k A.

3. Inverzní funkcí k obecné dispersi $X(t)$ je obecná disperse $x(T)$ diferenciálních rovnic (Q), (q) generovaná zobrazením p^{-1} inverzním k zobrazení p s počátečními body T_0, t_0.

Věta 3.2.4 *Všechny obecné disperse X rovnic (q), (Q) splňují v intervalu j nelineární diferenciální rovnici 3. řádu*

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \tag{Qq}$$

kterou nazýváme diferenciální rovnicí obecných dispersí rovnic (q), (Q).

Analogicky všechny obecné disperse x rovnic (Q), (q), inverzní k obecným dispersím X, splňují v intervalu J nelineární diferenciální rovnici 3. řádu

$$-\{x, T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T), \quad \textit{kde} \quad {}^{\cdot} = d/dT. \tag{qQ}$$

Důkaz.

Nechť $t \in j$ libovolně. Schwarzovskou derivací (viz Věta 1.3.1) vztahu $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$ (3.2.1) získáme

$$\{\alpha, t\} = \{\mathcal{A}, X(t)\} \cdot X'^2(t) + \{X, t\}.$$

Dále využitím vztahu $q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2(t)$ (2.1.8) dostaneme

$$q(t) + \alpha'^2(t) = (Q(X) + \dot{\mathcal{A}}^2(X)) \cdot X'^2(t) - \{X, t\},$$

odkud

$$q(t) = Q(X) \cdot X'^2(t) - \{X, t\},$$

neboť $\alpha'^2(t) = \dot{\mathcal{A}}^2(X) \cdot X'^2(t)$ (dostaneme ihned derivací vztahu (3.1.2)).

Víme, že obecná disperse je jednoznačně určena počátečními body t_0, T_0 a lineárním zobrazením p normalizovaným vzhledem k bodům t_0, T_0. Nyní bez důkazu uvedeme další dvě možnosti jednoznačného určení obecné disperse a odpovíme na otázku, jak dalece je obecná disperse charakterizována pouze daným lineárním zobrazením.

- Nechť t_0, X_0, X_0' ($\neq 0$), X_0'' jsou libovolná čísla. Pak existuje právě jedna obecná disperse X rovnic (q), (Q) daná počátečními podmínkami
$$X(t_0) = X_0, \qquad X'(t_0) = X_0', \qquad X''(t_0) = X_0''.$$
- Libovolné první fáze α, $\mathcal{A}$ diferenciálních rovnic (q), (Q) určují právě jednu obecnou dispersi X rovnic (q), (Q) jakožto řešení funkcionální rovnice
$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)).$$
- Lineární zobrazení $p : r \to R$ určuje právě jeden spočetný systém obecných dispersí rovnic (q), (Q) s generátorem p. Je-li $X(t)$ jedna obecná disperse tohoto systému, pak ostatní jsou tvaru $X(\varphi_n(t))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kde φ_n je n-tá centrální disperse 1. druhu.

Víme, že každá obecné disperse je řešením rovnice (Qq). Na otázku, zda rovnice (Qq) má i jiná řešení než obecné disperse, odpovídá následující věta. Přitom nás ovšem zajímají pouze řešení regulární, tj. $X' \neq 0$.

Věta 3.2.5 *Množina všech regulárních řešení diferenciální rovnice (Qq) definovaných v intervalu j je tvořena právě obecnými dispersemi rovnic (q), (Q).*

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 179–180.

Disperse k-tého druhu; $k = 1, 2, 3, 4$

Speciálními případy obecných dispersí jsou disperse 1., 2., 3. a 4. druhu.

Definice 3.2.6 Nechť rovnice (q) je oscilatorická v intervalu j a nechť pro nosič q rovnice (q) platí, že $q < 0$ a $q \in C^2$ pro každé $t \in j$.

Dispersí 1. druhu rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic (q), (q); *dispersí 2. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic $(\widehat{q})$, $(\widehat{q})$; *dispersí 3. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic (q), $(\widehat{q})$ a konečně *dispersí 4. druhu* rovnice (q) nazýváme obecnou dispersi rovnic $(\widehat{q})$, (q).

Poznámky.

1. Nechť X_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ značí disperse k-tého druhu rovnice (q). Pak z Věty 3.2.3 plynou následující vztahy

$$\alpha(X_1) = \overline{\alpha}(t), \quad \beta(X_2) = \overline{\beta}(t), \quad \beta(X_3) = \overline{\alpha}(t), \quad \alpha(X_4) = \overline{\beta}(t),$$

   kde α, $\overline{\alpha}$ značí první fáze a β, $\overline{\beta}$ druhé fáze rovnice (q).

2. Disperse k-tého druhu rovnice (q), $k = 1, 2, 3, 4$, přirozeně zahrnují centrální disperse odpovídajících druhů. Na ukázku uveďme, kdy je disperse 1. druhu rovna centrální dispersi 1. druhu. Pro disperse ostatních druhů jsou podmínky analogické.

   (a) Disperse 1. druhu X_1 rovnice (q) určená vztahem $\alpha(X_1) = \overline{\alpha}(t)$ je centrální dispersí 1. druhu právě tehdy, když fáze α, $\overline{\alpha}$ náleží do prvního fázového systému stejné báze rovnice (q). V takovém případě $X_1 = \varphi_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ právě tehdy, když $\overline{\alpha} = \alpha + n\pi \operatorname{sgn} \alpha'$.

   (b) Nechť X_1 je dispersí 1. druhu rovnice (q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Pak $X_1 = \varphi_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ právě tehdy, když $T_0 = \varphi_n(t_0)$ a $p = ce$, kde e značí identické zobrazení prostoru r do sebe a c nenulovou konstantu.

3.2.1 Algebraická struktura množiny obecných dispersí

Uvažujme diferenciální rovnice (q), (Q) na intervalech $j = J = (-\infty, \infty)$. Nechť D značí množinu obecných dispersí rovnic (q), (Q).

Víme, že každá obecná disperse $X \in D$ je neohraničená funkce, pro niž platí $X \in C^3$ a $X' \neq 0$. Z toho plyne (viz Věta 2.1.4), že X je neohraničenou první fází oscilatorické rovnice na intervalu $(-\infty, \infty)$. Platí tedy, že množina obecných dispersí D je podmnožinou grupy fází $\mathcal{G}$, tj. $D \subset \mathcal{G}$.

Obecná disperse $X \in D$ je jednoznačně určena vztahem $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$, kde α a $\mathcal{A}$ jsou libovolné první fáze rovnic (q) a (Q). Z odstavce týkajícího se algebraických vlastností centrálních dispersí víme, že fáze α a $\mathcal{A}$ určují množiny $\mathcal{F}\alpha$ a $\mathcal{F}\mathcal{A}$ všech fází rovnic (q) a (Q). $\mathcal{F}$ přitom značí fundamentální podgrupu grupy fází $\mathcal{G}$. Na základě těchto skutečností lze ukázat, že pro množinu obecných dispersí D rovnic (q), (Q) platí

$$D = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}\alpha.$$

Grupa dispersí 1. druhu rovnice (q)

Připomeňme, že dispersí 1. druhu rozumíme dispersi rovnic (q), (q). Tedy pro množinu $\mathcal{D}$ dispersí 1. druhu platí

$$\mathcal{D} = \alpha^{-1}\mathcal{F}\alpha.$$

Lze dokázat, že množina $\mathcal{D}$ tvoří spolu s operací skládání grupu, kterou nazveme *grupa dispersí 1. druhu rovnice* (q) a je podgrupou grupy fází $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$.

Všechny rostoucí disperse 1. druhu rovnice (q) tvoří v této grupě invariantní podgrupu $\mathcal{B}$. Tato podgrupa má netriviální centrum, kterým je nekonečná cyklická grupa $\mathcal{C}$ centrálních dispersí 1. druhu rovnice (q), tj. platí

$$\varphi_n X = X\varphi_n \quad \text{pro každý prvek} \quad X \in \mathcal{B},$$

kde φ_n $(n = 0, \pm 1 \pm 2)$ jsou centrální disperse 1. druhu.

Shrneme-li naše dosavadní poznatky, dostáváme: Disperse 1. druhu diferenciální rovnice (q) tvoří grupu $\mathcal{D}$. Rostoucí disperse 1. druhu tvoří v grupě $\mathcal{D}$ invariantní podgrupu $\mathcal{B}$. Nekonečná cyklická grupa $\mathcal{C}$ tvořená centrálními dispersemi 1. druhu rovnice (q) je centrum grupy $\mathcal{B}$. Centrální disperse 1. druhu se sudými indexy tvoří invariantní podgrupu $\mathcal{S}$ v grupě $\mathcal{D}$. Tedy

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}.$$

Zabýváme-li se algebraickou strukturou dispersí 2. druhu rovnice (q), dojdeme k závěrům analogickým jako u dispersí 1. druhu.

Závěrem celé kapitoly poznamenejme, že O. Borůvka zvolil název „disperse“ s úmyslem, aby připomínal rozložení (rozptyl, dispersi) nulových bodů řešení rovnice (q) a označení „centrální“ je odvozeno právě z grupových vlastností centrálních dispersí 1. a 2. druhu.

4 Teorie transformací

Tato kapitola bude věnována popisu transformací dvou libovolných rovnic (q), (Q). Na rozdíl od předchozí kapitoly budeme uvažovat rovnice oscilatorické i neoscilatorické.

Transformační problém obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu se poprvé objevil roku 1834 v práci *De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis* německého matematika E. E. Kummera a proto bývá označován jako Kummerův transformační problém. V této práci E. E. Kummer poprvé uvažoval transformaci (zachováváme Kummerovo označení a způsob zápisu)

$$y(x) = w(x)v(z), \tag{4.0.1}$$

která převede řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice 2. řádu tvaru

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

na řešení $v = v(z)$ rovnice

$$\frac{d^2v}{dz^2} + P(z)\frac{dv}{dz} + Q(z)v = 0.$$

Přitom jeho největším přínosem bylo objevení nelineární diferenciální rovnice 3. řádu, jejímž řešením dostaneme funkci $z = z(x)$ vystupující v transformační rovnici (4.0.1)

$$2\frac{d^3z}{dzdx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dzdx}\right)^2 - Z\frac{dz^2}{dx^2} + X = 0,$$

kde $Z = 2\frac{dP}{dz} + P^2 - 4Q$, $X = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q$.

E. E. Kummer odvodil také vztah pro funkci $w = w(x)$ ve tvaru

$$w^2 = c \cdot e^{\int Pdz} \cdot e^{-\int pdz} \cdot \frac{dx}{dz},$$

kde c je libovolná konstanta a e základ přirozeného logaritmu.

Delší dobu zůstávala nezodpovězená otázka, zda Kummerova transformace (4.0.1), která je lineární vzhledem k řešením y a v, nemůže být nahrazena obecnějším vztahem

$$y(x) = f(x, v(z(x))).$$

Koncem devatenáctého století dokázali nezávisle na sobě různými metodami P. Stäckel (J. reine angew. Math. 111 (1893)), S. Lie (Leipziger Ber. 1894) a E. J. Wilczynski (Amer. J. Math. 23 (1901)), že Kummerova transformace tvaru (4.0.1) je nejobecnější transformací, která převádí libovolnou lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu ($n \geq 2$) na rovnici téhož typu.

Po vydání Kummerova pojednání se začaly objevovat práce mnoha matematiků (F. Brioschi, A. R. Forsyth, G. H. Halphen, E. Laguerre aj.), v nichž byly studovány lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, jejich transformace, kanonické tvary atd. Avšak roku 1910 G. D. Birkhoff ukázal, že všechny doposud uveřejněné výsledky týkající se transformací mají pouze lokální charakter.

Takové výsledky ovšem nedostačují pro studium problémů globálního charakteru, jako je např. ohraničenost, periodicita, oscilatorické chování, nenulová řešení a mnoho dalších.

Samozřejmě, že jisté izolované výsledky globálního charakteru existovaly, např. Sturmova věta o separaci nulových bodů řešení lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Ovšem neexistovala ucelená teorie s dostatečně obecnými metodami k řešení globálních otázek.

Globálními vlastnostmi lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v Jacobiho tvaru se v padesátých letech tohoto století začal systematicky zabývat O. Borůvka.

O. Borůvka vyšel z výsledků E. E. Kummera, aplikoval je na rovnice v Jacobiho tvaru

$$y'' = q(t)y, \quad q \in C^0(j), \quad j = (a,b), \; -\infty \le a < b \le \infty, \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = Q(T)Y, \quad Q \in C^0(J), \quad J = (A,B), \; -\infty \le A < B \le \infty \tag{Q}$$

a postupně vytvořil obsáhlou teorii globálních transformací těchto rovnic, jejíž základy vyložíme v této kapitole.

Definice 4.0.1 Nechť $h(t)$, $X(t)$ jsou funkce definované na otevřeném intervalu $k \subseteq j$ takové, že platí

1. $h \in C^2$, $X \in C^3$
2. $h \cdot X' \neq 0$ pro každé $t \in k$
3. $K := X(k) \subseteq J$.

Transformací rovnic (q), (Q) rozumíme uspořádanou dvojici $[h, X]$ funkcí $h(t)$, $X(t)$ takovou, že pro každé řešení Y rovnice (Q) je funkce

$$y(t) = h(t)Y(X(t)) \tag{4.0.2}$$

řešením rovnice (q).

Funkce X se nazývá *transformační funkce rovnic* (q), (Q) nebo *jádro transformace* $[h, X]$ a funkce h *faktor transformace* $[h, X]$.

Poznámka. Mluvíme-li o transformaci rovnic (q), (Q) ve smyslu předchozí definice, uvažujeme transformaci řešení Y na intervalu $K := X(k) \subseteq J$ na řešení y na intervalu $k \subseteq j$.

Nebo ještě obecněji, transformaci části řešení Y na intervalu $I := X(i) \subseteq K \subseteq J$ na část řešení y na intervalu $i \subseteq k \subseteq j$.

Již jsme se zmínili, že transformacemi rovnic 2. řádu se poprvé zabýval E. E. Kummer, jehož největším přínosem byl objev nelineární diferenciální rovnice 3. řádu udávající vztah mezi koeficienty rovnic a transformační funkcí. Aplikujeme-li tento vztah na rovnice v Jacobiho tvaru dostaneme výsledek zformulovaný v následující větě.

Věta 4.0.2 *Každá transformační funkce X rovnic (q), (Q) je ve svém definičním intervalu $k \subseteq j$ řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu, tzv. Kummerovy rovnice*

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t) \tag{Qq}$$

a faktor h transformace $[h, X]$ rovnic (q), (Q) je jednoznačně určen funkcí X až na multiplikativní konstantu $c \neq 0$

$$h(t) = \frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{4.0.3}$$

Poznámky.

1. Podle předchozí definice transformační funkcí rovnic (q), (Q) rozumíme každou funkci $X \in C^3$, $X' \neq 0$ pro niž platí, že uspořádaná dvojice $[h, X]$ reprezentuje transformaci rovnic (q), (Q). Nadále budeme libovolnou funkci f splňující podmínky $f \in C^3$, $f' \neq 0$ nazývat funkcí *regulární*.

2. *Transformačním problémem* budeme rozumět problém určení všech možných transformací rovnic (q), (Q), tj. všech možných transformačních funkcí rovnic (q), (Q) a zkoumání jejich vlastností.

Důkaz Věty 4.0.2**.**

Odvození rovnice (Qq) a vztahu (4.0.3) provedeme pomocí transformace závisle a nezávisle proměnné.

Uvažujme diferenciální rovnice (q), (Q) a proveďme transformaci závisle proměnné $y(t) = h(t)z(t)$ a transformaci nezávisle proměnné $z(t) = Y(T)$, $T = X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$. Podle Věty 1.2.1 a jejího Důsledku 1.2.2 víme, že výsledná transformace $y(t) = h(t)Y(X(t))$ převádí řešení Y diferenciální rovnice (Q) na intervalu J na řešení y diferenciální rovnice (q) na intervalu j a pro nosič Q platí

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)). \tag{4.0.4}$$

Nejprve vyjádřeme faktor h transformace $[h, X]$ pomocí funkce X. Derivací vztahu $X(t) = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)d\sigma$ dostaneme $X'(t) = h^{-2}(t)$, odkud

$$h(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{|X'(t)|}}. \tag{4.0.5}$$

Zbývá odvození rovnice (Qq). Dosazením funkce h ze vztahu (4.0.5) do vztahu (4.0.4) obdržíme výraz

$$q(t) = Q(T)X'^2 - \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} + \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2},$$

což je hledaná rovnice (Qq)

$$q(t) = -\{X, t\} + Q(T)X'^2.$$

Teorii transformací lze rozdělit na dvě části podle toho, jaké podmínky klademe na transformační funkci. O *obecných transformacích* mluvíme v případě, že neklademe na transformační funkci žádné další požadavky kromě podmínek uvedených v Definici 4.0.1, o *úplných transformacích* v případě, že definiční obor transformační funkce je shodný s definičním oborem rovnice (q) a obor hodnot transformační funkce s definičním oborem rovnice (Q).

4.1 Obecné transformace

4.1.1 Řešení Kummerovy rovnice (Qq)

Hlavní roli v celé teorii transformací hraje Kummerova rovnice (Qq), neboť jejími řešeními jsou transformační funkce. Následující odstavec je proto věnován otázkám týkajícím se řešení této rovnice.

Řešením Kummerovy rovnice

$$-\{X,t\} + Q(X)X'^2 = q(t) \tag{Qq}$$

rozumíme funkci X definovanou v intervalu $k \subseteq j$. Přitom nás budou zajímat pouze řešení regulární, tj. $X \in C^3$ a $X' \neq 0$ pro každé $t \in k$; $X(k) = K \subseteq J$.

Lze dokázat, že je-li funkce $X(t)$ regulárním řešením rovnice (Qq) na intervalu $k \subseteq j$, pak existuje inverzní funkce $x(T)$ k funkci X definovaná na intervalu $K = X(k) \subseteq J$ a platí, že $x(T)$ je řešením rovnice

$$-\{x,T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T). \tag{qQ}$$

Ve všech dále uvedených tvrzeních budeme mluvit pouze o funkci X, tj. řešení rovnice (Qq). Pro funkci x inverzní k X platí tvrzení analogická.

Víme, že každá transformační funkce X rovnic (q), (Q) je regulárním řešením Kummerovy rovnice (Qq). Nyní odpovězme na otázku, zda také naopak každé regulární řešení rovnice (Qq) je transformační funkcí rovnic (q), (Q).

Věta 4.1.1 *Nechť funkce $X(t)$ je regulárním řešením rovnice (Qq) na intervalu $k \subseteq j$. Vyberme $t_0 \in k$ libovolně a označme hodnoty funkce X, X', X'' v bodě t_0 jako X_0, X_0', X_0''.*

Uspořádaná dvojice funkcí

$$[\frac{c}{\sqrt{|X'(t)|}}, X(t)],$$

kde c je libovolná nenulová konstanta, reprezentuje transformaci $[h, X]$ rovnic (q), (Q), kdy je každé řešení Y rovnice (Q) transformováno na funkci

$$\overline{y}(t) = c\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}, \tag{4.1.1}$$

která je částí řešení y rovnice (q) na intervalu k splňující počáteční podmínky

$$y(t_0) = c\frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}, \quad y'(t_0) = c\left[\frac{\dot{Y}(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}X_0' - \frac{1}{2}\frac{Y(X_0)}{\sqrt{|X_0'|}}\frac{X_0''}{X_0'}\right]. \tag{4.1.2}$$

Důkaz.

Nechť X je regulární řešení rovnice (Qq) na intervalu k a Y libovolné řešení rovnice (Q) na intervalu J. Budeme dokazovat, že funkce $\overline{y}$ daná vztahem (4.1.1) je částí jistého řešení y rovnice (q) splňující podmínky (4.1.2).

Funkce $\overline{y}$ má na intervalu k druhou derivaci

$$\overline{y}''(t) = c\frac{\ddot{Y}(X)}{\sqrt{|X'|}}X'^2 - c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}\{X,t\}. \tag{4.1.3}$$

Dále využijeme toho, že funkce Y splňuje rovnici (Q) a funkce X rovnici (Qq). V každém bodě $t \in k$ tedy platí

$$\ddot{Y}(X) = Q(X)Y(X), \qquad -\{X, t\} = -Q(X)X'^2 + q(t).$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (4.1.3) dostáváme

$$\overline{y}''(t) = c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}Q(X)X'^2 + c\frac{Y(X)}{\sqrt{|X'|}}[-Q(X)X'^2 + q(t)],$$

odkud

$$\overline{y}''(t) = q(t)\overline{y}.$$

Tedy funkce $\overline{y}$ je řešením rovnice (q). Podmínky (4.1.2) obdržíme derivací vztahu (4.1.1).

Důsledek 4.1.2 *Funkce X je regulárním řešením rovnice (Qq) právě tehdy, když je transformační funkcí rovnic (q), (Q).*

Následující dvě věty ukazují vztah mezi řešením rovnice (Qq) a prvními fázemi rovnic (q) a (Q). Na základě jejich platnosti následně dokážeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq).

Věta 4.1.3 *Nechť $X(t)$ je regulární řešení rovnice (Qq) na intervalu $k \subseteq j$. Vyberme $t_0 \in k$ libovolně a označme hodnoty funkce X, X', X'' v bodě t_0 jako X_0, X'_0, X''_0. Dále nechť $\mathcal{A}$ je libovolná první fáze rovnice (Q).*

Pak funkce $\overline{\alpha}$ definovaná na intervalu k vztahem

$$\overline{\alpha}(t) = \mathcal{A}(X(t)), \qquad t \in k \tag{4.1.4}$$

je částí jisté první fáze α rovnice (q), která je jednoznačně určena Cauchyovskými počátečními podmínkami

$$\alpha(t_0) = \mathcal{A}(X_0), \qquad \alpha'(t_0) = \dot{\mathcal{A}}(X_0)X'_0, \qquad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathcal{A}}(X_0)X'^2_0 + \dot{\mathcal{A}}(X_0)X''_0.$$

Důkaz.

Nechť $\mathcal{A}$ je první fází rovnice (Q), tj. první fází libovolné báze (U, V) rovnice (Q). Tedy v intervalu J platí tg $\mathcal{A} = U/V$ všude, kromě nulových bodů řešení V. Platí, že obrazem řešení U, V v transformaci $[h, X]$ rovnic (q), (Q) jsou funkce

$$\overline{u}(t) = h(t)U(X(t)), \qquad \overline{v}(t) = h(t)V(X(t)),$$

jež jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (q) definovaná na intervalu k a jsou částí nějakých řešení u, v rovnice (q).

Nechť α_0 je první fází báze (u, v). Pak pro $t \in k$ dostáváme

$$\text{tg}\,\alpha_0(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{\overline{u}(t)}{\overline{v}(t)} = \frac{h(t)U(X(t))}{h(t)V(X(t))} = \frac{U(X(t))}{V(X(t))} = \text{tg}\,\mathcal{A}(X(t)).$$

Odtud $\alpha_0(t) + m\pi = A(X(t))$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Protože α_0 je první fází báze (u, v), je i funkce $\alpha = \alpha_0(t) + m\pi$ první fází báze (u, v) a $\overline{\alpha}$ část fáze α definované na intervalu k.

Derivací vztahu (4.1.4) obdržíme počáteční podmínky pro $\alpha'(t_0)$ a $\alpha''(t_0)$.

Poznámka. Za použití funkce x inverzní k X platí, že funkce $\overline{\mathcal{A}}$ definovaná na intervalu $K = X(k)$ vztahem

$$\overline{\mathcal{A}}(T) = \alpha(x(T)), \qquad T \in K$$

je částí první fáze $\mathcal{A}$ rovnice (Q) a fáze $\mathcal{A}$ je určena odpovídajícími Cauchyovskými počátečními podmínkami.

Věta 4.1.4 *Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou libovolné fáze rovnic (q), (Q) takové, že $\alpha(j) \cap \mathcal{A}(J) \neq 0$.*
Označíme-li

$$L = \alpha(j) \cap \mathcal{A}(J), \qquad k = \alpha^{-1}(L), \qquad K = \mathcal{A}^{-1}(L),$$

pak ke každému číslu $t \in k$, resp. $T \in K$ existuje právě jedno číslo $Z(t) \in K$, resp. $z(T) \in k$ splňující rovnici

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(Z(t)), \qquad \textit{resp.} \qquad \alpha(z(T)) = \mathcal{A}(T). \tag{4.1.5}$$

Důkaz.

Zvolme $t \in k$ libovolně. Pak $\alpha(t) \in L = \mathcal{A}(K)$ a protože fáze $\mathcal{A}$ roste nebo klesá, existuje právě jedno číslo $Z(t) \in K$ splňující první rovnici (4.1.5). Analogicky pro druhou rovnici (4.1.5).

Poznámka. Funkce $Z(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$, $z(T) = \alpha^{-1}\mathcal{A}(T)$, definované vztahem (4.1.5) v intervalech k, K jsou zřejmě navzájem inverzní, náleží do třídy C^3 a jsou regulárním řešením rovnic (Qq), (qQ). Nazýváme je *řešení generovaná fázemi α, $\mathcal{A}$.*

Následující věta je jednou z nejdůležitějších v teorii obecných transformací.

Věta 4.1.5 *(O existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq))*
Nechť $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X_0'(\neq 0)$, X_0'' jsou libovolné. Pak existuje právě jedno „nejširší" řešení $Z(t)$ rovnice (Qq) v jistém intervalu $k \subseteq j$ splňující Cauchyovy podmínky

$$Z(t_0) = X_0, \qquad Z'(t_0) = X_0', \qquad Z''(t_0) = X_0'', \tag{4.1.6}$$

kde „nejširší" znamená, že každé jiné řešení (Qq) splňující stejné počáteční podmínky je částí $Z(t)$.

Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou libovolné první fáze rovnic (q), (Q) takové, že $\alpha(j) \cap \mathcal{A}(J) \neq 0$ a nechť jejich hodnoty v bodech t_0, X_0 jsou dány vztahy

$$\alpha(t_0) = \mathcal{A}(X_0), \qquad \alpha'(t_0) = \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0', \qquad \alpha''(t_0) = \ddot{\mathcal{A}}(X_0)X_0'^2 + \dot{\mathcal{A}}(X_0)X_0''. \tag{4.1.7}$$

Pak $Z(t)$ je řešení rovnice (Qq) generované fázemi α, $\mathcal{A}$ a platí

$$Z(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t)), \qquad t \in k.$$

Důkaz.

Vyberme jednu z fází, například fázi α, libovolně. Pak podle Věty 2.1.5 je fáze $\mathcal{A}$ jednoznačně určena hodnotami $\mathcal{A}(X_0)$, $\dot{\mathcal{A}}(X_0)$, $\ddot{\mathcal{A}}(X_0)$, které jsou dány vztahy (4.1.7) a $X_0 \in J$ libovolně.

Řešení $Z(t)$ generované fázemi α, $\mathcal{A}$ zřejmě splňuje počáteční podmínky (4.1.6). Chceme ukázat, že každé řešení $X(t)$ rovnice (Qq) definované v intervalu $k \subseteq j$ počátečními podmínkami (4.1.6) je částí řešení $Z(t)$. Podle Věty 4.1.3 je funkce $\overline{\alpha}(t) = \mathcal{A}(X(t))$ definovaná v intervalu k částí jisté první fáze α_0 rovnice (q), která je jednoznačně určena stejnými počátečními podmínkami (4.1.6) jako fáze α. Z toho plyne, že $\alpha_0(t) = \alpha(t)$ pro $t \in j$ a dále $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$ pro $t \in k$. Tedy $X(t)$ je částí $Z(t)$ na intervalu k.

4.1.2 Transformace řešení rovnic (q), (Q)

Nechť jsou dána libovolná řešení y, Y rovnic (q), (Q). Budeme se zabývat otázkou, zda můžeme při užití vhodného řešení $X(t)$ rovnice (Qq) transformovat jedno z nich, např. Y, vztahem

$$\overline{y}(t) = \frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

na část $\overline{y}$ druhého řešení y, kde $t \in k \subseteq j$. Jak dále uvidíme, odpověď na tuto otázku bude za jistých předpokladů kladná a dokonce budeme moci předepsat libovolnou hodnotu X_0, kterou funkce X nabývá v libovolném bodě $t_0 \in j$, tj. $X(t_0) = X_0$.

Věta 4.1.6 *Nechť y, Y jsou libovolná řešení rovnic (q), (Q) definovaná na intervalech j, J. Dále nechť $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ jsou libovolná čísla splňující jednu z následujících podmínek:*

$$(a)\ y(t_0) \neq 0 \neq Y(X_0) \qquad (b)\ y(t_0) = 0 = Y(X_0).$$

Pak existuje nejširší řešení X rovnice (Qq) nabývající hodnoty X_0 v bodě t_0, tj. $X_0 = X(t_0)$, které transformuje řešení Y na intervalu J na část $\overline{y}$ řešení y vztahem

$$\overline{y}(t) = \varepsilon \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$, přičemž v případě (a) je

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} y(t_0) Y(X_0)$$

a v případě (b)

$$\varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sgn} y'(t_0)\dot{Y}(X_0) & \textit{pro } X \textit{ rostoucí}, \\ -\operatorname{sgn} y'(t_0)\dot{Y}(X_0) & \textit{pro } X \textit{ klesající}. \end{cases}$$

V případě (a) existuje právě jedno rostoucí a právě jedno klesající nejširší řešení X rovnice (Qq), v případě (b) existuje nekonečně mnoho rostoucích a nekonečně mnoho klesajících řešení X.

Důkaz.

Důkaz lze nalézt v [25], str. 210–211.

Poznámka. Podle předchozí věty tedy ke každému řešení Y na J a řešení y na j existuje funkce X definovaná na intervalu $k \subseteq j$, jejímž oborem hodnot je interval $X(k) = J$, která transformuje řešení Y na J na řešení $\overline{y}$ na intervalu $k \subseteq j$.

Speciální případ, kdy je řešení Y na intervalu J transformováno na řešení y na intervalu j, nastane za předpokladu, že funkce X je definovaná na intervalu $k = j$ a navíc $X(j) = J$. Tomuto případu se budeme věnovat v odstavci *Úplné transformace.*

4.1.3 Vztah mezi transformačním problémem a centrálními dispersemi

V tomto odstavci se omezíme pouze na oscilatorické diferenciální rovnice (q) s nosičem $q < 0$ a budeme zkoumat vztahy mezi transformační funkcí X a centrálními dispersemi.

Podle Věty 3.1.3 platí, že všechny centrální disperse 1. druhu φ_n rovnice (q) jsou v intervalu j řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$-\{\varphi_n, t\} + q(\varphi_n){\varphi_n}'^2 = q(t) \tag{qq}$$

a dále za předpokladu $q \in C^2$ jsou všechny centrální disperse ψ_n, χ_n, ω_n 2., 3. a 4. druhu v intervalu j řešením rovnic $(\widehat{q}\widehat{q})$, $(\widehat{q}q)$, $(q\widehat{q})$. Vidíme, že tyto rovnice jsou speciálními případy Kummerovy rovnice (Qq).

Také jsme ukázali, že centrální disperse libovolného druhu je třídy C^3 a má nenulovou derivaci. Můžeme tedy říci, že centrální disperse libovolného druhu je regulárním řešením rovnice (Qq) a podle Důsledku 4.1.2 je tedy transformační funkcí reprezentující transformaci rovnice (q) a její průvodní rovnice $(\widehat{q})$. Uvažujeme přitom všechny čtyři vzájemně možné transformace. Tyto úvahy vedou k následující větě, která je pouze jinou formulací Věty 3.1.3.

Věta 4.1.7 *Nechť y značí libovolné řešení rovnice (q) a y_1 řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Dále nechť φ_n, ψ_n, χ_m, ω_m ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $m = \pm1, \pm2, \ldots$) jsou libovolné centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q).*

Pak uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}}, \varphi_n(t)\right]$$

reprezentuje transformaci rovnic (q), (q), kdy je každé řešení y rovnice (q) transformováno na to samé řešení y.

Dále za předpokladu $q \in C^2$ platí, že uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\psi_n'(t)}}, \psi_n(t)\right]$$

reprezentuje transformaci rovnic $(\widehat{q})$, $(\widehat{q})$, kdy je každé řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$ transformováno na to samé řešení y_1,

$$\left[\frac{(-1)^m}{\sqrt{\chi_m'(t)}}, \chi_m(t)\right]$$

transformaci rovnic (q), $(\widehat{q})$, kdy je každé řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$ transformováno na řešení y rovnice (q) a

$$\left[\frac{(-1)^m}{\sqrt{\omega_m'(t)}}, \omega_m(t)\right]$$

transformaci rovnic $(\widehat{q})$, (q), kdy je každé řešení y rovnice (q) transformováno na řešení y_1 rovnice $(\widehat{q})$.

Důkaz.

Větu lze jednoduše dokázat pomocí vztahů pro derivace dispersí. Například ze vztahu (3.1.3) pro centrální dispersi 1. druhu plyne

$$y(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}} y(\varphi_n(t)),$$

kde y je řešení rovnice (q). Tedy uspořádaná dvojice

$$\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}}, \varphi_n(t) \right]$$

reprezentuje transformaci rovnic (q), (q), kdy je každé řešení rovnice (q) transformováno na to samé řešení.

Analogicky dostaneme vztahy pro centrální disperse ostatních druhů.

Shrneme-li předchozí poznatky, můžeme říci, že centrální disperse oscilatorických diferenciálních rovnic jsou jistým řešením Kummerova transformačního problému pro diferenciální rovnici (q) a její průvodní rovnici $(\widehat{q})$.

4.1.4 Vztah mezi transformačním problémem a obecnými dispersemi

V tomto odstavci se opět omezíme na oscilatorické rovnice a ukážeme si souvislost mezi obecnými dispersemi a transformační funkcí oscilatorických rovnic (q), (Q).

Podle Věty 3.2.4 platí, že každá obecná disperse X rovnic (q), (Q) je v intervalu j řešením nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t),$$

která je Kummerovou rovnicí (Qq).

Také jsme ukázali, že pro obecnou dispersi X na intervalu j platí $X \in C^3$ a $X' \neq 0$. Můžeme tedy říci, že obecná disperse X je regulárním řešením rovnice (Qq) a podle Důsledku 4.1.2 je tedy transformační funkcí reprezentující transformaci rovnic (q), (Q). Přesnou transformační rovnici uvádí následující věta.

Věta 4.1.8 *Nechť X je obecná disperse diferenciálních rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Nechť $Y \in R$ je libovolné řešení rovnice (Q) a $y \in r$ jeho vzor v lineárním zobrazení p. Pak funkce $Y(X)/\sqrt{|X'|}$ je řešením rovnice (q) a v intervalu j platí*

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = \pm \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} y(t),$$

kde znaménko nezávisí na výběru řešení Y.

Důkaz.

Nechť X je obecná disperse rovnic (q), (Q) s počátečními body t_0, T_0 a generátorem p. Dále nechť α je libovolná fáze báze (u, v) rovnice (q) taková, že $\alpha(t_0) = 0$ a $\mathcal{A}$ libovolná fáze báze (U, V) rovnice (Q) taková, že $\mathcal{A}(T_0) = 0$. Pak podle Věty 3.2.3 obecná disperse X splňuje v intervalu j funkcionální rovnici

$$\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t)). \tag{4.1.8}$$

Vyjádřeme nyní řešení y a jeho obraz Y v zobrazení p pomocí fází. Využijeme přitom vztahy (2.1.6), tj.

$$u = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'|}} \sin\alpha, \qquad v = \varepsilon \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|\alpha'|}} \cos\alpha.$$

Víme, že obecné řešení y lze vyjádřit ve tvaru $y = c_1 u + c_2 v$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Zvolíme-li $c_1 = \gamma \cos k_2$, $c_2 = \gamma \sin k_2$ ($\gamma > 0, 0 \le k_2 < 2\pi$), pak pro řešení y dostáváme

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad k_1 = \gamma\varepsilon\sqrt{|w|}. \tag{4.1.9}$$

Obrazem řešení $y = c_1 u + c_2 v$ v zobrazení p je řešení $Y = c_1 U + c_2 V$, kde U, V jsou dány vztahy

$$U = E \frac{\sqrt{|W|}}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}} \sin\mathcal{A}, \qquad V = E \frac{\sqrt{|W|}}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}} \cos\mathcal{A}.$$

Po dosazení dostáváme

$$Y = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} k_1 \frac{\sin(\mathcal{A} + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}|}}.$$

Tedy

$$Y(X(t)) = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} k_1 \frac{\sin(\mathcal{A}(X(t)) + k_2)}{\sqrt{|\dot{\mathcal{A}}(X(t)) \cdot X'(t)|}},$$

odkud za využití vztahu (4.1.8) a (4.1.9) plyne

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = \varepsilon E \sqrt{\left|\frac{W}{w}\right|} y(t),$$

kde $\varepsilon E = \pm 1$.

Poznámky.

1. Při vhodně zvoleném zobrazení $\overline{p}$, kde p a $\overline{p}$ jsou lineárně závislá, dostáváme

$$\frac{Y(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}} = y(t).$$

2. Nechť U, V jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (Q) a W je wronskián báze (U, V). Pak řešení

$$u = \frac{U(X)}{\sqrt{|X'|}}, \qquad v = \frac{V(X)}{\sqrt{|X'|}}$$

rovnice (q) jsou také lineárně nezávislá a pro wronskián w báze (u, v) platí

$$w = W \cdot \operatorname{sgn} X'.$$

Z Věty 4.1.8 vidíme, že každá obecná disperse oscilatorických rovnic (q), (Q) reprezentuje transformační funkci rovnic (q), (Q), tj. je řešením Kummerovy rovnice (Qq). A naopak, podle Věty 3.2.5 je množina všech regulárních řešení rovnice (Qq) tvořena právě obecnými dispersemi rovnic (q), (Q). Z těchto úvah okamžitě plyne následující tvrzení.

Důsledek 4.1.9 *Funkce X je transformační funkcí oscilatorických rovnic (q), (Q) právě tehdy, když je obecnou dispersí rovnic (q), (Q).*

Poznámky.

1. Vztah mezi transformačním problémem a dispersemi 1. až 4. druhu:

   Připomeňme, že disperse 1. až 4. druhu jsou speciálními případy obecných dispersí rovnic (q) a $(\widehat{q})$. Tedy disperse 1. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u rovnice (q) transformováno na nějaké řešení v té samé rovnice (q), přičemž je zachována lineární nezávislost řešení. Obdobně disperse 2. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q), transformováno na nějaké řešení v_1 té samé rovnice $(\widehat{q})$, disperse 3. druhu je jádrem transformace, která transformuje každé řešení u_1 rovnice $(\widehat{q})$ na nějaké řešení v rovnice (q) a disperse 4. druhu je jádrem transformace, kdy je každé řešení u rovnice (q) transformováno na nějaké řešení v_1 rovnice $(\widehat{q})$.

2. Srovnání transformací, jejichž jádrem jsou centrální disperse k-tého druhu a disperse k-tého druhu ($k = 1, 2, 3, 4$):

   Předpokládejme, že rovnice (q) je oscilatorická s nosičem $q < 0$, $q \in C^2$ pro každé $t \in j$ (předpoklad $q \in C^2$ zajišťuje existenci průvodní rovnice $(\widehat{q})$ k rovnici (q)).

   (a) Nechť $\varphi_n, \psi_n, \chi_m, \omega_m$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots, m = \pm1, \pm2, \cdots)$ jsou centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q) dané v Definici 3.1.1. Nechť u je libovolné řešení rovnice (q) a u_1 je řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Připomeňme přitom, že platí vztah $u_1 = u'/\sqrt{-q}$. Následující tabulka popisuje transformace rovnic a jejich řešení v případě, že jádrem transformace je některá z centrálních dispersí.

Jádro transformace	Transformace rovnic	Transformace řešení	Transformační rovnice
φ_n	$(q), (q)$	$u \mapsto u$	$u(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\varphi_n'(t)}} u(\varphi_n(t))$
ψ_n	$(\widehat{q}), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto u_1$	$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\psi_n'(t)}} \frac{u'(\psi_n(t))}{\sqrt{-q(\psi_n(t))}}$
χ_m	$(q), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto u$	$u(t) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\chi_m'(t)}} \frac{u'(\chi_m(t))}{\sqrt{-q(\chi_m(t))}}$
ω_m	$(\widehat{q}), (q)$	$u \mapsto u_1$	$\frac{u'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\omega_m'(t)}} u(\omega_m(t))$

Tab. 2 Transformace, jejichž jádrem jsou centrální disperse

   (b) Nechť X_1, X_2, X_3 a X_4 jsou disperse 1., 2., 3. a 4. druhu rovnice (q) dané v Definici 3.2.6. a nechť p značí generátor příslušné disperse. Nechť u je libovolné řešení rovnice (q) a v jeho obraz v lineárním zobrazení p. Dále nechť u_1, v_1 značí odpovídající řešení rovnice $(\widehat{q})$, jež je průvodní rovnicí k rovnici (q). Připomeňme přitom, že platí vztah $u_1 = u'/\sqrt{-q}$ a $v_1 = v'/\sqrt{-q}$. Při volbě vhodného generátoru dané disperse jsou v intervalu j splněny transformační rovnice uvedené v následující tabulce.

Jádro transformace	Transformace rovnic	Transformace řešení	Transformační rovnice
X_1	$(q), (q)$	$u \mapsto v$	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_1'(t)\rvert}} u(X_1(t))$
X_2	$(\widehat{q}), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto v_1$	$\frac{v'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_2'(t)\rvert}} \frac{u'(X_2(t))}{\sqrt{-q(X_2(t))}}$
X_3	$(q), (\widehat{q})$	$u_1 \mapsto v$	$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_3'(t)\rvert}} \frac{u'(X_3(t))}{\sqrt{-q(X_3(t))}}$
X_4	$(\widehat{q}), (q)$	$u \mapsto v_1$	$\frac{v'(t)}{\sqrt{-q(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\lvert X_4'(t)\rvert}} u(X_4(t))$

Tab. 3 Transformace, jejichž jádrem jsou disperse 1. až 4. druhu

4.2 Úplné transformace

Při studiu úplných transformací vyjděme z Věty 4.1.5 o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (Qq). Podle této věty existuje právě jedno „nejširší“ řešení $Z(t)$ rovnice (Qq) definované v intervalu $k \subseteq j$ splňující počáteční podmínky. Obor hodnot K řešení $Z(t)$ tvoří podinterval intervalu J, tj. $K \subseteq J$. Je zřejmé, že obecně se interval k nerovná j, ani interval K se nerovná J. To znamená, že řešení Y rovnice (Q) nejsou obecně transformovány funkcí $Z(t)$ na řešení y rovnice (q) v jejich celých definičních oborech, ale pouze v částech definičních oborů.

Transformacím rovnic v jejich celých definičních oborech se budeme věnovat v tomto odstavci.

Řešení $X(t)$ rovnice (Qq) budeme nazývat *úplné*, je-li jeho definiční obor k roven intervalu j a obor hodnot $X(k) = K$ je roven intervalu J, tj.

$$k = j, \qquad X(k) = K = J.$$

Podobně mluvíme o *úplných transformacích* rovnic (q), (Q) právě tehdy, když je transformační funkce $X(t)$ úplným řešením rovnice (Qq). Tehdy je každé řešení Y rovnice (Q) na intervalu J transformováno na řešení y rovnice (q) na intervalu j.

Lze dokázat, že je-li transformace $[\frac{c}{\sqrt{|X'|}}, X]$ rovnic (q), (Q) úplná, pak je i inverzní transformace $[\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{|x'|}}, x]$ rovnic (Q), (q) úplná. V této souvislosti budeme mluvit o *úplných vzájemně inverzních transformacích* rovnic (q), (Q).

Chceme určit nutnou a dostatečnou podmínku pro existenci úplného řešení rovnice (Qq), tj. pro existenci úplné transformace rovnic (q), (Q) a počet těchto transformací.

Uvažujme tedy rovnice (q), (Q) na jejich definičních intervalech $j = (a, b)$, $J = (A, B)$. Víme, že každé řešení X rovnice (Qq) je jednoznačně určeno dvěma vhodnými prvními fázemi α, $\mathcal{A}$ rovnic (q), (Q) vztahem $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$, $t \in k \subseteq j$. Tehdy říkáme, že řešení X je generováno těmito fázemi.

Věta 4.2.1 *Dvě fáze α, $\mathcal{A}$ diferenciálních rovnic (q), (Q) generují úplné řešení X rovnice (Qq) právě tehdy, když jsou fáze α, $\mathcal{A}$ podobné.*

Důkaz.

(a) Nechť X je úplné řešení rovnice (Qq) a α, $\mathcal{A}$ první fáze, jež řešení X generují. Pak $X(j) = J$ a pro $t \in j$ platí $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$. Tedy obory hodnot fází α, $\mathcal{A}$ se v definičních oborech j, J těchto fází shodují, tj. $\alpha(j) = \mathcal{A}(J)$. Tedy podle Definice 2.3.1 jsou fáze α, $\mathcal{A}$ podobné.

(b) Nechť α, $\mathcal{A}$ jsou podobné fáze rovnic (q), (Q) definované v intervalech j, J. Tedy platí $\alpha(j) = \mathcal{A}(J)$. Z toho plyne, že v intervalu j je obor hodnot funkce X konstruované vztahem $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$ roven intervalu J a dále že pro $t \in j$ je splněn vztah $\alpha(t) = \mathcal{A}(X(t))$. Fáze α, $\mathcal{A}$ tedy generují úplné řešení X rovnice (Qq).

Z předchozí věty plyne, že rovnice (Qq) má úplné řešení X právě tehdy, když existují podobné fáze rovnic (q), (Q). Podle Věty 2.3.2 existují podobné fáze rovnic (q), (Q) právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu. Z toho okamžitě plyne následující důsledek.

Důsledek 4.2.2 *Diferenciální rovnice (Qq) má úplné řešení právě tehdy, když jsou rovnice (q), (Q) stejného typu a druhu.*

Tedy úplné vzájemně inverzní transformace rovnic (q) a (Q) existují právě tehdy, když jsou dané rovnice stejného typu a druhu. Říkáme, že rovnice (q) a (Q) jsou úplně (globálně) transformovatelné jedna na druhou. V tomto směru lze ukázat, že platí:

1. Každá rovnice je globálně transformovatelná na sebe.
2. Je-li rovnice (Q) globálně transformovatelná na rovnici (q), pak také rovnice (q) je globálně transformovatelná na rovnici (Q).
3. Je-li (Q) globálně transformovatelná na (R) a (R) globálně transformovatelná na (P), pak také (Q) je globálně transformovatelná na (P).

Můžeme tedy říci, že relace „globální transformovatelnosti“ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je tedy relací ekvivalence. Rovnice, které jsou na sebe vzájemně globálně transformovatelné, nazýváme proto globálně ekvivalentní. Jinou formulací Důsledku 4.2.2 je tzv. kritérium globální ekvivalence pro rovnice 2. řádu.

Borůvkovo kritérium globální ekvivalence pro rovnice 2. řádu:

Dvě homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu jsou globálně ekvivaletní právě tehdy, když jsou stejného typu druhu.

Na množině všech homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu lze tedy vytvořit rozklad příslušný této ekvivalenci. Každá třída tohoto rozkladu bude obsahovat rovnice, které jsou globálně ekvivalentní. Je vhodné vybrat z každé třídy jednu rovnici (samozřejmě spolu s definičním intervalem), která bude reprezentovat celou třídu. Takovou rovnici nazveme rovnicí kanonickou. Protože všechny rovnice dané třídy jsou ekvivalentní s rovnicí kanonickou, můžeme zkoumat vlastnosti řešení rovnic dané třídy invariantní k uvažovaným transformacím prostřednictvím vlastností rovnice kanonické.

Borůvkovy kanonické tvary lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu:

$y'' = -y$	na	$(0, \pi/2)$	konečný typ 1,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, \pi)$	konečný typ 1,	speciální druh
$y'' = -y$	na	$(0, 3\pi/2)$	konečný typ 2,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, 2\pi)$	konečný typ 2,	speciální druh
...			...	...
$y'' = -y$	na	$(0, (m-1/2)\pi)$	konečný typ m,	obecný druh
$y'' = -y$	na	$(0, m\pi)$	konečný typ m,	speciální druh
...			...	...
$y'' = -y$	na	$(0, \infty)$	nekonečný typ,	vpravo oscilator.
$y'' = -y$	na	$(-\infty, 0)$	nekonečný typ,	vlevo oscilator.
$y'' = -y$	na	$(-\infty, \infty)$	nekonečný typ,	oboustranně oscilator.

Kritérium globální ekvivalence a kanonické tvary pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu lze považovat za jedny z nejdůležitějších výsledků monografie [16]. Byla jimi v jistém smyslu završena Borůvkova teorie globálních vlastností lineárních homogenních rovnic 2. řádu v reálném oboru.

V dalších letech se tato teorie stala základem pro vytvoření teorie globálních vlastností lineárních rovnic n-tého řádu, jejíž výsledky byly shrnuty v monografii F. Neumana *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations* [C18].

Závěrem uveďme dva příklady, jež slouží ke konstrukci diferenciální rovnice s předepsanými vlastnostmi. Využijeme zde větu o transformaci závisle a nezávisle proměnné a ilustrujeme platnost Borůvkova kritéria globální ekvivalence.

Příklad 1.

Chceme nalézt diferenciální rovnici (q) definovanou na intervalu $(-\infty, \infty)$, která je globálně ekvivalentní s rovnicí $\ddot{Y} = -Y$ definovanou na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Uvažujme tedy rovnice

$$y'' = q(t)y, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \tag{Q}$$

a hledejme nosič $q(t)$ rovnice (q) a globální transformaci rovnic (q), (Q) ve tvaru $y(t) = h(t)Y(X(t))$. Využijeme přitom Věty 1.2.1. Nejprve zvolme vhodnou funkci $X(t) = T$ tak, aby přetransformovala interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, například

$$X(t) = T = \operatorname{arctg} t.$$

Z Věty 1.2.1 (ii), s využitím této konkrétní volby T, plyne

$$\operatorname{arctg} t = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma) d\sigma,$$

odkud

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{h^2(t)} \qquad \text{a tedy} \qquad h(t) = \pm\sqrt{1+t^2}.$$

Podle téže věty platí pro nosiče rovnic (q) a (Q) vztah

$$Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t)).$$

Dosazením funkce $Q(T) = -1$ a funkce $h(t) = \pm\sqrt{1+t^2}$ do tohoto vztahu dostáváme

$$q(t) = 0.$$

Schématické znázornění transformace rovnic (q), (Q):

$$\ddot{Y} = -Y, \quad T \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad \text{konečný typ 1, speciální druh}$$

$$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{1+t^2} \cdot Y(T), \quad T = \operatorname{arctg} t$$

$$y'' = 0, \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Transformace báze řešení:

$$U = \sin T \qquad \longrightarrow \qquad u = \sqrt{1+t^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} t) = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = t$$

$$V = \cos T \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{1+t^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} t) = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1$$

Vidíme, že řešení u má právě jeden nulový bod a řešení v nemá žádný nulový bod. Tedy nalezená rovnice (q) je stejně jako rovnice (Q) konečného typu 1, speciálního druhu.

Příklad 2.

Modifikujme předcházející úlohu na nalezení diferenciální rovnice (q) definované na intervalu $(-\infty, \infty)$, která je globálně ekvivalentní s rovnicí $\ddot{Y} = -Y$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ a obecně na intervalu $(-k\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2})$.

Uvažujme tedy nejprve rovnice

$$y'' = q(t)y, \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{q}$$

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\pi, \pi) \tag{Q}$$

a postupujme analogicky jako v příkladě 1. Vyberme vhodnou funkci $X(t) = T$ tak, abychom přetransformovali interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\pi, \pi)$, například

$$T = 2 \operatorname{arctg} t.$$

Z Věty 1.2.1 (ii), s využitím této konkrétní volby T, plyne

$$2 \operatorname{arctg} t = \int_{t_0}^{t} h^{-2}(\sigma)\, d\sigma,$$

odkud

$$\frac{2}{1+t^2} = \frac{1}{h^2(t)} \qquad \text{a tedy} \qquad h(t) = \pm\sqrt{\frac{1+t^2}{2}}.$$

Dosazením funkcí $h(t)$ a $Q(T) = -1$ do vztahu $Q(T) = h^3(t)(-h''(t) + q(t)h(t))$ obdržíme

$$q(t) = \frac{-3}{(1+t^2)^2}.$$

Schématické znázornění transformace rovnic (q), (Q):

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-\pi, \pi), \qquad \text{konečný typ 2, speciální druh}$$

$$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot Y(T), \quad T = 2\operatorname{arctg} t$$

$$y'' = \frac{-3}{(1+t^2)^2} y, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Transformace báze řešení:

$$U = \sin T \qquad \longrightarrow \qquad u = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot \sin(2\operatorname{arctg} t) = \sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$V = \cos T \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}} \cdot \cos(2\operatorname{arctg} t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Vidíme, že řešení u má právě jeden nulový bod a řešení v má dva nulové body. Tedy nalezená rovnice je konečného typu 2, speciálního druhu. Opět jsme ověřili, že rovnice (q) a (Q) jsou stejného typu a druhu.

Obecně můžeme dokázat:

$$\ddot{Y} = -Y, \qquad T \in (-k\tfrac{\pi}{2}, k\tfrac{\pi}{2}), \qquad \text{konečný typ k, speciální druh}$$

$$\downarrow \qquad y(t) = \sqrt{\frac{1+t^2}{k}} \cdot Y(T), \quad T = k\operatorname{arctg} t$$

$$y'' = \frac{1-k^2}{(1+t^2)^2} y, \quad t \in (-\infty, \infty) \qquad \text{konečný typ k, speciální druh}$$

Uvedené příklady pouze ilustrují některé pojmy Borůvkovy teorie. Ukázky využití této teorie při řešení některých problémů, například ve variačním počtu nebo ve studiu asymptotických vlastností řešení rovnic 2. a 3. řádu, přesahuje rámec této práce. Více podrobností lze nalézt v monografii F. Neumana *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations* [C18] nebo v monografii M. Greguše *Third Order Linear Differential Equation* [C22].

IV Vědecká činnost

Cílem této části je podat přehled o vědecké činnosti O. Borůvky v letech 1940 – 1966 a o vzniku a činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic.

První kapitola naznačuje situaci ve vědeckovýzkumné práci v Československu po roce 1945, kdy v souvislosti s novou politickou koncepcí došlo ke zřizování nových vědeckých institucí, zakládání seminářů na vysokých školách a k řadě dalších změn, jež se promítly do vědecké činnosti každého matematika.

Ve druhé kapitole je pojednáno o vědecké práci O. Borůvky v letech 1940 – 1947. Tehdy se věnoval převážně své teorii grup, grupoidů a rozkladů množin, avšak v pozadí této orientace na algebru již lze vystopovat první zmínky o zaměření na diferenciální rovnice.

Cílevědoměji se O. Borůvka začíná věnovat problematice diferenciálních rovnic v období let 1947 – 1950. Toto období, jež bylo z pohledu pedagogické činnosti popsáno ve II. části práce a jež je z pohledu vědecké činnosti popsáno ve třetí kapitole této části, lze považovat za počátek činnosti semináře pro studium diferenciálních rovnic.

Cílem čtvrté kapitoly je zachytit vědeckou činnost O. Borůvky v souvislosti s činností semináře pro studium diferenciálních rovnic v letech 1951 – 1960. Při popisu činnosti semináře v jednotlivých letech se zaměříme především na ty partie, které souvisí s Borůvkovou teorií dispersí a transformací. Zdrojem ke zmapování obsahu seminářů se staly zprávy o činnosti semináře (původní název byl *Hlášení o postupu výzkumných prací*), které O. Borůvka zasílal děkanátu Přírodovědecké fakulty MU a Matematické komisi ČSAV a dále jeho osobní poznámky ze seminářů. Je zřejmé, že se seminář stal kolébkou vědeckých výsledků nejen O. Borůvky, ale i mnoha dalších matematiků, kteří se v průběhu let semináře zúčastňovali. Proto u každého roku také uvedeme seznam publikací členů semináře, jež se týkají obyčejných diferenciálních rovnic. Seznam publikační činnosti členů semináře byl sestaven na základě seznamů publikací jednotlivých matematiků, jak jsou uvedeny v jubilejních článcích [C9] – [C14] a na základě materiálů uložených v archivu O. Borůvky. Z důvodu, že se nepodařilo získat informace o publikační činnosti všech členů semináře, je možné, že v seznamech publikací ve sledovaném období některé práce chybí. V souvislosti s vědeckou činností O. Borůvky v jednotlivých letech se také zmíníme o jeho zahraničních cestách, o jeho publikacích z diferenciálních rovnic, které nesouvisí s teorií dispersí a transformací a krátce si všimneme semináře pro studium díla M. Lercha. Nebudeme uvádět žádné jiné pedagogické ani vědecké aktivity O. Borůvky, jako popularizační přednášky a články, práce z teorie grup a grupoidů, ani různé vyznamenání a ceny, které O. Borůvka obdržel za svou práci.

Celé toto období let 1951 – 1960 bude nakonec shrnuto v páté kapitole, jež má název *O vzniku transformační teorie (do roku 1960)*.

Šestá kapitola již stručněji pojednává o činnosti semináře v letech 1961 – 1966.

Poslední kapitola přináší podrobnější přehled zahraničních cest a mezinárodních konferencí do roku 1966, na nichž O. Borůvka proslovil přednášku týkající se diferenciálních rovnic.

Závěrem uveďme poznámku k jazyku, který v této části užíváme. Tato část vznikla převážně zpracováním oficiálních zpráv o činnosti semináře. Z důvodu, že zde uvádíme mnoho citací z těchto zpráv, zachováváme i v částech necitovaných matematický jazyk O. Borůvky, i když se v některých případech liší od jazyku užívaného ve III. části práce. Jedná se například o používání pojmu *integrál* místo pojmu *řešení*. Dále poznamenejme, že z důvodu přehlednosti a úspory místa budeme často místo označení *obyčejné lineární diferenciální rovnice* používat pouze *rovnice*.

1 Vědeckovýzkumná práce v Československu po roce 1945

Podmínky pro rozvoj vědecké práce nebyly v prvních poválečných letech příznivé. Množství organizačních starostí se znovuvybudováním ústavů a seminářů, materiální potíže, nedostatečné personální vybavení a velké pedagogické zatížení učitelů vzhledem k vysokým počtům studentů poválečných let – to všechno nepříznivě ovlivňovalo rychlejší nástup k vědecké práci. Publikace, které se přesto v tomto období objevily, byly převážně výsledkem badatelské činnosti v období okupačním. Po válce byl důraz kladen především na vytvoření nových učebnic a skript.

Organizační a obsahové změny, k nimž došlo na počátku padesátých let, jako bylo zdůrazňování politickovýchovné a pedagogické práce, reorganizace ústavů a mnoho dalších, vedly k poklesu vědecké práce. Nepřímo k tomu přispělo i založení Československé akademie věd, která si brzy získala ve vědeckém výzkumu do značné míry privilegované postavení, což vedlo k zatlačení vysokých škol jako tradičních vědeckých pracovišť do druhořadého postavení. Je však třeba říci, že se Přírodovědecká fakulta MU, stejně jako i ostatní fakulty, těmto snahám o omezení vědecké práce bránila, jak můžeme zjistit z různých přípisů adresovaných rektorátu a ministerstvu. Za účelem rozvíjení vědeckovýzkumné práce byly roku 1953 zřízeny vědecké rady, od roku 1954 obnovena tradice vědeckých celouniverzitních konferencí a zřizovány studentské vědecké kroužky. Svůj význam mělo i zavedení nové hodnosti kandidáta věd roku 1953. V neposlední řadě zdůrazněme význam státních, resortních a fakultních úkolů, které sehrály velkou roli ve vědecké činnosti mnoha matematiků, mimo jiné i O. Borůvky.

Uveďme několik poznámek k organizačním změnám, jež předcházely a souvisely se založením ČSAV. Již po roce 1945 se v souvislosti s novou politickou koncepcí začaly provádět mnohé změny, jejichž hlasatelem a organizátorem byl E. Čech. Také jeho zásluhou byl roku 1947 zřízen Ústav pro matematiku při České akademii věd a umění. E. Čech, který přešel roku 1946 z Brna do Prahy, se stal pak jeho prvním ředitelem. V ústavu bylo ustanoveno 10 sekcí, jejichž přednosty se stali O. Borůvka, B. Bydžovský, E. Čech, V. Hlavatý, J. Janko, V. Jarník, V. Kořínek, J. Novák, E. Schoenbaum a F. Vyčichlo. O. Borůvka byl přednostou sekce pro klasickou analýzu.

Další změny nastaly na počátku padesátých let. Na základě vládního nařízení z 20. 6. 1950 o nové organizaci vědeckého výzkumu a zřízení ústředních vědecko-výzkumných ústavů se stal Ústav pro matematiku při České akademii věd a umění základem nového Ústředního ústavu matematického (ÚÚM), který byl vytvořen roku 1951. Perspektivně se počítalo s převedením ústavu do vznikající Československé akademie věd pod I. (matematicko-fyzikální) sekci. Takto zřízený Matematický ústav ČSAV (MÚ ČSAV) začal pracovat od 1. ledna 1953.

Při I. sekci byla o rok později zřízena tzv. Matematická komise ČSAV, která pečovala o pořádání přednášek, vědeckých seminářů a starala se také o to, aby výsledky těchto přednášek a seminářů byly přístupné všem matematickým pracovištím v republice.

V souvislosti s těmito změnami vzniklo na Přírodovědecké fakultě MU několik vědeckých seminářů. Ty byly původně zřízeny v rámci činnosti Ústavu pro matematiku při České akademii věd a umění, pak v rámci ÚÚM a později v rámci Matematické komise při I. sekci ČSAV. Tyto semináře byly řízeny brněnskými vědeckými pracovníky a soustřeďovaly prakticky všechny matematiky působící na brněnských vysokých školách. Jednalo se o následující semináře:

Seminář pro studium díla Matyáše Lercha vedl O. Borůvka v letech 1945 – 1948 a znovu pak v letech 1952 – 1956. Činnost semináře byla ukončena vydáním publikace s názvem *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy*.

Seminář pro studium diferenciálních rovnic vedl O. Borůvka od školního roku 1946/47. Byl věnován obyčejným diferenciálním rovnicím se zřetelem k aplikacím. Činností tohoto semináře se budeme zabývat dále.

Seminář pro elementární matematiku vedl K. Koutský od roku 1950. Seminář byl zaměřen hlavně ke studiu klasické a moderní elementární geometrie. Kromě toho se v něm probíraly otázky týkající se didaktiky a metodiky školské matematiky a dále historie a ideologie matematiky. Členové semináře spolupracovali při sepisování středoškolských učebnic matematiky.

Seminář pro topologii, vedený K. Koutským, vznikl v roce 1954 a navázal na tradici topologického semináře E. Čecha z let 1936 – 1939. Seminář byl věnován studiu obecné topologie.

Seminář o uspořádaných množinách vedl J. Novák od roku 1945. Také tento seminář navázal na topologický seminář E. Čecha. V souvislosti s ním vznikly a později se široce rozrostly letní školy algebry.

Seminář moderních metod v deskriptivní geometrii vedl L. Seifert v letech 1950 – 1952. Seminář byl věnován studiu centrální projekce ve čtyřrozměrném prostoru a speciálním otázkám vícerozměrné geometrie se zřetelem k aplikacím v prostoru o třech dimenzích.

Seminář pro diferenciální geometrii vedl nejprve po roce 1945 E. Čech a později od roku 1952 J. Klapka z brněnské techniky.

2 Vědecká činnost O. Borůvky v letech 1940 – 1947

Připomeňme, že od 1. srpna 1940 až do osvobození byl O. Borůvka na tzv. dovolené s čekatelným. V té době nebyl zaměstnán a pracoval soukromě, hlavně na své teorii grupoidů. Jak sám uvádí ve zprávě o výsledcích vědecké práce za rok 1942:

Od roku 1938 zabývám se studiem pojmu grupoidu a vytvořil jsem v té době rozsáhlou a na výsledky bohatou teorii grupoidů, na níž dále pracuji.

Ve vědecké činnosti pokračuje také v letech 1943 a 1944, přičemž se stále více zaměřuje na problematiku rozkladů množin. Ve zprávě o činnosti z roku 1944 čteme:

Hlavním předmětem mého nynějšího studia jest pojem funkce v nejobecnějším smyslu a zejména jeho vlastnosti, které souvisí s pojmem rozkladu množiny.

Práci na své teorii grupoidů a rozkladů množin dokončuje v roce 1945. Ve zprávě za tento rok uvádí:

Při svých studiích zaměřených k vytvoření obecné theorie grupoidů jsem seznal, že obecnou theorii grupoidů lze s úspěchem založiti na theorii rozkladů v množině. To mne vedlo k tomu, že jsem se v r. 1945 věnoval vypracování theorie rozkladů v množině. Výsledkem jest obsažný spis „Theorie rozkladů v množině. Část I.“, který hodlám uveřejniti ve Spisech vydávaných přírodovědeckou fakultou Masarykovy university a v nejbližších dnech jej odevzdám do tisku.

Pro úplnost uveďme přehled vědeckých publikací O. Borůvky v tomto období: *Teorie grupoidů. Část první* (Spisy přír. fak. MU, č. 275, 1939), *Über Ketten von Faktoroiden* (Math. Ann. 118, 1941, 41–64), *O rozkladech množin* (Rozpravy II. České akademie LIII, č. 23, 1943), *Über Zerlegungen von Mengen* (Mitteilungen der Tschechischen Akad. der Wiss. LIII, Nr. 23, 1943), *Úvod do teorie grup* (Královská česká společnost nauk. Praha 1944, 80 str.), *Theorie rozkladů v množině. Část I* (Spisy přír. fak. MU, č. 278, 1946).

Protože se dále pracím O. Borůvky v teorii grup, grupoidů a rozkladů množin nebudeme věnovat, uveďme k této činnosti jen několik poznámek. I přesto, že se hlavní vědecká činnost O. Borůvky v dalších letech soustředila na problematiku diferenciálních rovnic, ke svým výsledkům z oblasti grupoidů a grup se několikrát vrátil. V roce 1952 vyšlo rozšířené druhé vydání knihy *Úvod do teorie grup* (Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952) a v letech 1957 a 1958 O. Borůvka pracoval na jejím dalším rozšíření na novou knihu. Jak sám uvádí ve zprávě o vědecké činnosti v letech 1948 – 1958:

Zejména jsem vypracoval theorii řad rozkladů množin a její aplikace při zobrazování množin na množiny konečných posloupností (na př. na množiny bodů v n-rozměrných souřadnicových prostorech) a v theorii vědeckých klasifikací. Dále jsem použil výsledků této theorie na řady faktoroidů v grupoidech a na řady rozkladů grup vytvořené podgrupami.

Výsledkem je německy psaná kniha *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, XII, 1960, 198 str.) a její česká verze *Základy teorie grupoidů a grup* (Nakl. ČSAV, Praha, 1962, 216 str.).

Vraťme se však do let 1940 – 1947. O své teorii grupoidů uskutečnil O. Borůvka v těchto letech také řadu přednášek, například v brněnském odboru JČMF nebo na sjezdu matematiků v Jeně v roce 1941. V roce 1940 byl pozván profesorem W. Blaschkem z univerzity v Hamburku k rozhovorům o teorii grupoidů. Jednalo se o soukromou cestu, žádné veřejné přednášky zde O. Borůvka nekonal.

Kromě vědeckých pojednání uveřejnil O. Borůvka v této době několik jubilejní článků o českých matematicích a popularizační článků o matematice. V roce 1940 měl v rozhlase krátkou přednášku o čtyřrozměrném prostoru.

V období těsně po válce se O. Borůvka zaměřil především na pedagogickou práci, na přípravu přednášek a učebních textů pro studenty; vydává v té době skripta *Matice* (1947, druhé vydání 1948).

Ačkoliv oficiální zprávy o činnosti z tohoto období neuvádí žádné zmínky o zaměření O. Borůvky na diferenciální rovnice, z jeho soukromé korespondence se dovídáme, že se již v lednu 1943 rozhodl začít pracovat na knize o diferenciálních rovnicích a již v prosinci 1943 v dopise V. Kořínkovi píše:

Nyní pilně studuji a spisuji diferenciální rovnice, ale kniha jest ještě v daleké budoucnosti.

Podrobnosti o této knize, která se svého vydání nakonec nedočkala, uvedeme v 1. kapitole V. části práce.

3 Sekce pro klasickou analýzu v letech 1947 – 1950

Již jsme se zmínili o tom, že roku 1947 byl zřízen Matematický ústav České akademie věd a umění v Praze a O. Borůvka byl zvolen přednostou jedné z deseti sekcí, sekce pro klasickou analýzu (tehdejší název byl *sekce pro klasickou analysu*). O zahájení činnosti této sekce na přírodovědecké fakultě citujme ze zprávy zaslané O. Borůvkou Matematickému ústavu České akademie věd a umění 12. 4. 1948 (archiv Matematického ústavu AV ČR):

Sekce pro klasickou analysu zahájila činnost po mém návratu z Belgie[5] *dne 7. dubna t. r. V programu této sekce pro nejbližší dobu je podrobné studium Lerchových prací za tím účelem, aby mohl býti posouzen a zhodnocen Lerchův význam v české matematice s hlediska tehdejší doby. Soustavné studium Lerchových prací jsem konal od zimního běhu 1945/46 v Semináři pro studium díla M. Lercha na přírodovědecké fakultě Masarykovy university a přenesu je nyní do sekce pro klasickou analysu. Protože však řada dosavadních účastníků zmíněného semináře se zabývala od začátku studijního roku 1947/48 přípravou referátů a seminárních prací podle dřívějšího programu, byla by přenesením činnosti semináře do sekce matematického ústavu přerušena plynulost těchto prací. Z toho důvodu se zdálo účelné, aby do ukončení tohoto stud. roku 1947/48 byla činnost sekce pro klasickou analysu a Semináře pro studium díla M. Lercha společná.*

Ze zprávy o činnosti ve studijním roce 1947/48 se dovídáme, že bylo vykonáno pět dvouhodinových schůzí, jichž se zúčastňovalo průměrně 21 členů sekce a semináře.

Ve studijním roce 1948/49 bylo vykonáno 14 schůzí. Ve zprávě o činnosti sekce pro klasickou analýzu za tento rok O. Borůvka uvádí:

Přednášel jsem o řešeních reálních dif. r. 1. řádu v okolí sing. bodu se zřetelem na uvedení do studia Perronových prací v Math. Z. 15 (1922) a 16 (1923) a na některé neřešené otázky v této souvislosti. První z těchto prací byla kriticky rozebrána a v podstatných rysech opravena; referoval člen sekce p. Váňa. Mimo to konali přednášky o výsledcích svých prací tito členové sekce: M. Novotný, O systémech s dvojím násobením a levým distributivním zákonem; M. Zlámal, O Picardových posloupnostech; J. Škrášek, O matematických metodách v teorii klasifikací. Práce Dr. Škráška je v tisku, druhé dvě jsou ve stavu posledních úprav. V dalších schůzích referoval člen sekce V. Richter o své teorii nekonečných systémů dif. rovnic

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots), \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

která je založena jenom na předpokladu spojitosti funkcí f_i. *Výsledky rozšiřují klasickou teorii konečných systémů (existenční teorém, věty o jednoznačnosti řešení, závislost řešení na parametrech) a zobecňují dosavadní poznatky v tomto směru, které předpokládají platnost Lipschitzovy podmínky pro funkce* f_i *a event. další vlastnosti. Mimo to byla probírána druhá z Perronových prací o řešeních reálních dif. rovnic prvního řádu v okolí sing. bodu (Math. Z., 16 (1923)).*

Ve studijním roce 1949/50 činnost sekce pokračovala v pravidelných schůzích ve čtrnáctidenních intervalech. O. Borůvka přednášel o užití Zygmundovy věty (S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, str. 137) na rozšíření klasických vět o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic,

[5] V Belgii O. Borůvka pobýval od 20. 2. do 21. 3. 1948. Vykonal několik přednášek o teorii grupoidů na univerzitách v Bruselu a v Liége.

o Sturmových oscilačních větách, o lineárních operátorech a jejich použití v teorii Sturmovy rovnice a o vlastních funkcích Sturmova problému. Mimo to přednášel M. Novotný o svých výsledcích zobecňujících Weyrovu teorii charakteristických čísel matice, V. Richter o diferenciálních rovnicích v Banachově prostoru, M. Zlámal o oscilačních kritériích pro Sturmovu rovnici a F. Šik o vytvořujících rozkladech na kvasigrupách.

V tomto roce v rámci činnosti sekce pracovaly dva kroužky. První, pod vedením M. Zlámala, vypracoval kartotéku literatury o obyčejných diferenciálních rovnicích z let 1930 – 1945 obsahující asi 1000 položek. Druhý kroužek, pod vedením J. Škráška, studoval knihu G. Birkhoffa, *Lattice Theory*.

Rukopisy nových prací předložili: M. Novotný, Rozklady topologických prostorů; F. Šik, O vytvořujících rozkladech na kvasigrupách; M. Zlámal, Asymptotické vlastnosti řešení diferenciální rovnice 3. řádu. Kromě toho M. Zlámal publikoval práci *Oscillation Criterions* (Čas. pěst. mat. fyz. 75, 1950, 213–218).

V přehledu o publikační a vědecké činnosti za období do roku 1950 O. Borůvka uvádí:

Pracuji na obsáhlé knize o diferenciálních rovnicích a v souvislosti s tím na některých dílčích problémech (spojitost peanovských funkcí, rozdělení konjugovaných čísel lineární dif. rovnice 2. řádu).

4 Seminář v letech 1951 – 1960

Připomeňme, že na základě vládního nařízení z 20. 6. 1950 o nové organizaci vědeckého výzkumu a zřízení ústředních vědecko-výzkumných ústavů se stal Ústav pro matematiku při České akademii věd a umění základem nového Ústředního ústavu matematického (ÚÚM). Dále tedy spadá sekce pro klasickou analýzu pod ÚÚM. V rámci ÚÚM začala sekce pro klasickou analýzu pod vedením O. Borůvky plnit od 1. 1. 1951 výzkumný úkol s evidenčním číslem 01 s názvem *Studium obtížnějších kapitol o diferenciálních rovnicích.* Tento úkol, jenž přešel v průběhu roku 1951 pod Ministerstvo školství, věd a umění, byl k 31. 12. 1951 splněn a ukončen. V poznámce v plánovacím listu tohoto výzkumného úkolu se uvádí:

Pokračování v úspěšné činnosti konané po 3 roky v rámci Matematického ústavu České akademie. Převzetí této činnosti je v zájmu zamezení duplicity a je nezbytným předpokladem žádoucí likvidace Matematického ústavu České akademie.

Od roku 1952 začal O. Borůvka plnit v rámci své činnosti na Přírodovědecké fakultě MU dlouhodobý vědecko-výzkumný úkol z matematiky, zařazený do resortního plánu Ministerstva školství a kultury (MŠK) pod názvem *Studium speciálních vlastností diferenciálních rovnic obyčejných se zřetelem k aplikacím.* Tento úkol byl v roce 1952 a 1953 veden pod evidenčním číslem 01/16 a od roku 1954 pod číslem Ma-6.

V rámci reorganizace vědecko-výzkumných úkolů na léta 1961 – 1965 v souvislosti se zařazením matematiky do státního plánu vědecko-výzkumných prací ve III. pětiletce byl úkol Ma-6 pro příští léta z resortního plánu MŠK vyčleněn a další práce v tomto směru byly od 1. 1. 1961 pojaty do státního plánu výzkumu. Vzhledem k tomu byl zmíněný resortní úkol Ma-6 ke dni 31. 12. 1960 ukončen.

O. Borůvka si byl od počátku vedení semináře vědom důležitosti oboru diferenciálních rovnic pro soudobou i budoucí matematiku a tím pro budoucí matematickou generaci.

Diferenciální rovnice (obyčejné) jsou jedním z nejvýznamnějších oborů matematiky s hlediska aplikací ve fysice a v technických problémech. Z obsáhlé látky, která v tomto směru přichází zvláště v úvahu, jsou to otázky týkající se dif. rovnic lineárních 2. řádu. Řada skvělých matematických theorií, na př. v souvislosti s okrajovými problémy 2. řádu nebo s proslulou Hillovou rovnicí, mají svůj původ právě v problémech fysikálních nebo astronomických.

Je velmi žádoucí, aby náš vědecký dorost, ať již se zaměřením k průmyslu nebo k učitelské činnosti, byl s těmito otázkami a s příslušnými theoriemi dobře obeznámen. Toho nelze docílit již v době universitního studia, protože jde většinou o obtížnější kapitoly vyžadující širokých základů a k tomu čas v povinných přednáškách nestačí. Proto jsem považoval za potřebné studovati s naším vědeckým dorostem právě otázky tohoto druhu. Praktický význam tohoto úkolu vidím v rozšíření a v prohloubení odborných znalostí posluchačů, v usnadnění studia podobných otázek, s nimiž se v budoucnu setkají, a ve vzbuzení jejich zájmu o aplikace matematiky ve fysice a v technických problémech. [Předávací protokol za rok 1951]

Zpočátku se semináře konaly ve čtrnáctidenních intervalech a byly dvouhodinové. V pozdějších letech byly intervaly spíše třítýdenní.

Ve schůzích nejčastěji přednášel O. Borůvka, ale nebyly výjimkou ani referáty ostatních členů semináře, kteří většinou přednášeli o svých vlastních vědeckých výsledcích. Po přednáškách vždy následovaly diskuse o probrané látce.

Schůzí se zúčastňovali především asistenti matematických ústavů brněnských vysokých škol. Z mimobrněnských se od počátku zúčastňovali M. Švec a M. Greguš z Bratislavy a M. Laitoch z Olomouce. Později začali dojíždět také V. Šeda z Bratislavy, B. Věchtová a J. Palát z Olomouce a K. Stach z Ostravy.

Více se o členech semináře dozvíme z následující tabulky, v níž jsou uvedeni ti členové semináře, kteří se v rozmezí let 1951 – 1960 zúčastnili přednášek více než pětkrát. U každého jména je zaznamenán počet účastí v semináři v daném roce. Údaje pro vytvoření tabulky jsou čerpány z prezenčních listin jednotlivých seminářů, jež jsou uloženy v archivu O. Borůvky. Pro úplnost poznamenejme, že chybí prezenční listiny ze seminářů konaných ve dnech 25. 4. 1952, 26. 11. 1957 a 23. 5. 1958.

Dále se v odstavcích 4.1 – 4.10 podrobněji zaměříme na činnost semináře v jednotlivých letech, konkrétněji v jednotlivých pololetích. Jak již bylo řečeno v úvodu k této části, zaměříme se především na tu činnost semináře, která souvisí s Borůvkovou teorií dispersí a transformací. Informace o obsahu seminářů jsou čerpány převážně ze zpráv o činnosti těchto seminářů. Také většina citací zde uvedených pochází z těchto zpráv. Jestliže citace vychází z jiného zdroje, tak je tento zdroj uveden.

Jméno	Rok (počet seminářů v daném roce)									
	1951 (17)	1952 (17)	1953 (14)	1954 (9)	1955 (8)	1956 (9)	1957 (9)	1958 (8)	1959 (8)	1960 (5)
Barot J.	5	11	6	4	7	4	1	1		
Bartoněk					7	6	2		3	1
Barvínek E.	1	5	9	5	5	7	5	7	6	4
Březina J.	6	1	4	1	2			1	1	
Cejpek J.			2	5						
Čermák J.	16	10	5	3	3	1				
Čulík K.			5	2						
Frank L.	13	11	10	6	2	1			1	
Greguš M.	5	11	9	9	7	8	4	7	4	4
Hustý Z.	3			1	6	7	7	7	5	2
Chrastina J.						4	7	4	4	5
Janová V.				2	4					
Krejzlík J.					6	6				
Kudláček V.	7		1							
Laitoch M.		4	12	6	4	4	2	4	4	1
Litzman O.	7	6								
Mastný E.	9									
Mikulík M.	9	7	8	4	6	3		1		
Neuman F.						3				4
Novotný M.	15	12	9	4			1			
Opluštil K.	2	8	2							
Peňáz J.	9	4								
Pichanová V.		6	5	2	6	7	4	7	7	3
Ráb M.	8	3	12	2	8	6	8	7	6	4
Radochová V.	7	12	4		8	7	5	6	5	2
Radochová – Řehůřková D.				2	8	6	6	2	7	4
Rozenský		1		1	5					
Sekanina M.				2	7	8	8	5	6	3
Stach K.								3	5	5
Šabacký J.	6		1							
Šantavá – Krohová S.	11	12	5	7	6	7	6	6	7	3
Šantavý I.		7	7	4						
Šeda V.						6	5	6	8	5
Šik F.	3	7	11				1			
Široký J.		16	11	3	7	5		1		
Škrášek J.	15	16	9	5	3	5		2	3	1
Švec M.	17	13	11	9	8	6	6	6	8	4
Vala J.	4	2								
Věchtová B.							1	2	3	
Vosmanský J.						5	4	2	5	4
Zlámal M.	2	7	11	7	8	5	6	6	7	3

4.1 Činnost semináře v roce 1951

I. pololetí 1951:

V I. pololetí se konalo 12 schůzí semináře (23. 1., 20. 2., 27. 2., 14. 3., 27. 3., 18. 4., 2. 5., 15. 5., 5. 6., 12. 6., 21. 6., 28. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 14 členů.

V semináři konaném dne 18. 4. přednášel M. Novotný o svých výsledcích o zaměnitelných zobrazeních. Jedná se o řešení problému konstrukce všech zobrazení na množině zaměnitelných s daným zobrazením. Tato látka s diferenciálními rovnicemi nesouvisí, avšak vzešla z rozhovorů a konzultací s O. Borůvkou.

Ve dnech 5. 6. a 12. 6. referoval L. Frank o některých výsledcích práce G. Sansone *Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale* (Revista, 1948). Zejména probral normální tvar lineární homogenní diferenciální rovnice 3. řádu a tzv. první srovnávací a první oscilační větu.

Ve všech ostatních seminářích referoval O. Borůvka. Uveďme stručně hlavní témata přednášek:

1. Lineární operátory, zejména 2. řádu. Rozklad lineárních operátorů 2. řádu na operátory 1. řádu reálné a komplexní. (23. 1.)

2. Základní vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Kanonický tvar řešení těchto rovnic a jeho derivace.

   Dále jsem odvodil několik (pravděpodobně nových) výsledků založených na tom, že hodnoty podílu dvou řešení lin. dif. rovnice 2. řádu v kořenech třetího řešení jsou stejné, a na obdobných větách o derivacích řešení. (20. 2.)

3. Definice dispersí 1., 2., 3. a 4. druhu pro diferenciální rovnici

   $$y'' - Q(x)y = 0. \qquad (a)$$

   Odvození vzorců pro derivace dispersí 1. a 2. druhu

   $$\varphi'(x) = \frac{z^2(\varphi(x))}{z^2(x)}, \qquad \psi'(x) = \frac{Q(x)}{Q(\psi(x))}\frac{z'^2(\psi(x))}{z'^2(x)},$$

   kde z značí libovolné řešení rovnice (a), které v čísle x není nulové (pro první vzorec), příp. jehož derivace v čísle x není nulová (pro druhý vzorec).

   Odvození diferenciální rovnice, kterou splňují disperse 1. druhu

   $$\sqrt{|\varphi'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\varphi'|}}\right)'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x). \qquad (b)$$

   Aplikace na případ, že disperse 1. druhu je lineární: $\varphi(x) = x + \omega$.

   Poznámka o růstu dispersí, zejména třetího a čtvrtého druhu. (20. 2., 27. 2., 14. 3.)

4. Sturmův oscilační teorém pro diferenciální rovnici $(Q(x,\lambda)y')' - Q(x,\lambda)y = 0$ a jeho zvláštní případ, kdy funkce Q závisí na λ lineárně. Dále byl vyložen pojem Sturmových a Sturm-Liouvilleových systémů a předvedeno řešení Sturmova okrajového problému ve zvláštním případě nulových okrajových hodnot řešení nebo jeho derivace. (27. 2., 14. 3., 2. 5., 15. 5., 21. 6., 28. 6.)

II. pololetí 1951:

Ve II. pololetí bylo vykonáno 5 schůzí semináře (30. 10., 21. 11., 30. 11., 10. 12., 19. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 10 členů.

Ve dnech 30. 11. a 10. 12. přednášel J. Čermák o základních vlastnostech systémů lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty.

V ostatních seminářích přednášel O. Borůvka. Probral transformaci Sturm-Liouvilleova okrajového problému na tvar $U'' + [\lambda^2 - B(x)]U = 0$; $U'(0) - hU(0) = 0$, $U'(\pi) + HU(\pi) = 0$, asymptotické vyjádření vlastních hodnot a vlastních funkcí a řešení téhož problému v případě $U(0) = 0$, $U(\pi) = 0$. Dále probral pojem Fourierových řad vzhledem k normovaným ortogonálním posloupnostem funkcí a Walshovy výsledky o ekvikonvergenci Fourierových řad, zejména pokud jde o řady vzhledem k normovaným ortogonálním posloupnostem vlastních funkcí a řady trigonometrické.

Rokem 1951 byl předložený úkol ukončen a podle plánu zcela splněn. Navíc proti plánu byly probrány nové výsledky z tzv. teorie dispersí. Uveďme citaci O. Borůvky z předávacího protokolu z roku 1951:
Domnívám se, že jde o výsledky, které podstatně rozšiřují klasickou theorii dif. lineárních rovnic 2. řádu a podnítí vznik dalších prací zejména též v souvislosti s významnými speciálními dif. rovnicemi 2. řádu (Besselova dif. rovnice, Mathieuova dif. rovnice a j.). Řadu výsledků, k nimž jsem dospěl, jsem zatím v přednáškách neuvedl, protože je dále doplňuji a nevystačil bych s časem k splnění původního plánu.

Publikační činnost členů semináře:

- M. Zlámal: *Asymptotic Properties of the Solutions of the Third Order Linear Differential Equations.* Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 329, 1951, 159–167.

Řada členů kolektivu pracovala na samostatných tématech (asistenti: J. Čermák, D. Jelínková, S. Krohová, O. Litzman, M. Mikulík, K. Opluštil). Některé z těchto prací jsou již ukončeny a byly předloženy na zdejší fakultě jako disertace (S. Krohová, Vlastnosti integrálů systému dvou diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu; J. Čermák, O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic; O. Litzman, Diferenciální rovnice závislé na parametru a otázky o stabilitě integrálů; M. Mikulík, Svazy s metrikou; K. Opluštil, O-systémy). [Zpráva za III. čtvrtletí 1951]

4.2 Činnost semináře v roce 1952

I. pololetí 1952:

V I. pololetí bylo vykonáno 11 schůzí semináře (23. 1., 1. 2., 15. 2., 13. 3., 21. 3., 25. 4., 29. 4., 30. 5., 3. 6., 24. 6., 30. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 12 členů.

Ve všech seminářích přednášel O. Borůvka. Uveďme stručně hlavní témata přednášek:

1. Oscilační kritéria pro diferenciální rovnice 2. řádu

   $$y'' = Q(x)y \qquad\qquad (a)$$

   (Sturmova porovnávací věta, kritéria Kneserova a Wintnerova). (23. 1., 1. 2.)

2. Studium extrémních hodnot oscilujících integrálů a jejich derivací rovnice (a) v případech různých předpokladů pro funkci Q (Q je ohraničená zápornými čísly, Q neroste, Q neklesá, Q je pro dosti velká x monotonní aj.). (15. 2.)

3. Věta o ohraničenosti integrálů rovnice $y'' = [Q(x) + \nu(x)]y$ a její aplikace. (13. 3.)

4. Asymptotické vyjádření integrálů rovnice $y'' = [-1 + Q(x)]y$ se zřetelem na použití v případě Besselových funkcí (Besselova diferenciální rovnice, přehled o základních vlastnostech Besselových funkcí J_n (n celé), transformace Besselovy diferenciální rovnice na normální tvar, asymptotické vzorce prvního a druhého řádu pro Besselovy funkce $J_n(x)$, $J_n'(x)$ (n celé) a základní vlastnosti těchto funkcí). (21. 3., 25. 4., 29. 4., 30. 5.)

5. Asymptotické vlastnosti integrálů rovnice (a) v případě $\lim_{x\to\infty} Q(x) = 0$, v případě $Q(x) > 0$, v případě, že počáteční hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$ jsou téhož znaménka aj. (3. 6., 24. 6.)

6. Předložení problému určení takových oscilatorických rovnic (a), jejichž integrály mají ekvidistantní kořeny.

   Diferenciální rovnice $y'' = -m^2 \cdot y$, v níž m značí kladnou konstantu, se vyznačuje tím, že dva sousední kořeny každého jejího integrálu mají vzdálenost $\pi : m$. Tuto vlastnost vyjadřujeme tím, že kořeny integrálů oné d. rovnice jsou ekvidistantní se vzdáleností $\pi : m$.

   Jest otázka, zda existují i jiné oscilující d. rovnice

   $$y'' = Q(x)y, \qquad\qquad (a)$$

   jejichž kořeny jsou ekvidistantní a v případě, že existují, mají se určit všechny příslušné funkce Q.

   Připusťme, že se d. rovnice (a) vyznačuje tím, že kořeny jejích integrálů jsou ekvidistantní se vzdáleností d (> 0). Pak základní disperse prvního druhu je dána vzorcem:

   $$\varphi(x) = x + d$$

a z diferenciální rovnice dispersí prvního druhu

$$\sqrt{\varphi'}(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}})'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x)$$

máme

$$Q(x+d) = Q(x),$$

takže funkce Q je periodická s periodou d.

O. Borůvka dále odvozuje tvrzení, že funkce Q se dá vyjádřit pomocí vhodných periodických funkcí Y_1, Y_2, majících periodu d a splňujících rovnici

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' + \frac{\pi}{d}(Y_1^2 + Y_2^2) = d.$$

Jak uvádí O. Borůvka ve zprávě za rok 1952, nějaké předběžné výsledky v řešení tohoto problému předložil L. Frank. Zejména sestrojil na základě jiných úvah několik příkladů rovnice (a) s ekvidistantními kořeny integrálů. Jedním z jeho příkladů je rovnice

$$y'' = \frac{5 - 9\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} y,$$

která má lineárně nezávislé integrály, jejichž každé dva sousední kořeny mají vzdálenost π.

II. pololetí 1952:

Ve II. pololetí se konalo 6 schůzí semináře (21. 10., 30. 10., 27. 11., 1. 12., 5. 12., 12. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 15 členů.

Ve všech seminářích přednášel O. Borůvka a nových výsledcích z teorie dispersí rovnice (a):

1. Řešení rovnic $U^{(i)}(x)v^{(k)}(y) - V^{(i)}(x)u^{(k)}(y) = 0$, přičemž U, V a u, v značí integrály rovnice (a) a indexy i, k $(= 0, 1)$ řády derivací. (21. 10.)
2. Vlastnosti regulárních projektivností v systému integrálů rovnice (a). Základní čísla a intervaly. (30. 10.)
3. Definice dispersí, disperse 1. druhu přímé a nepřímé, vlastní a nevlastní, monotonie a spojitost dispersí (1. druhu) vlastních a nevlastních. Existence derivací, diferenciální rovnice dispersí 1. druhu. (27. 11., 1. 12.)
4. Vlastnosti vlastních dispersí:

   Fukce $y(\xi) : \sqrt{|\xi'|}$, složená z libovolného integrálu y d. rovnice $y'' = Q(x)y$ a z vlastní disperse ξ, jest opět integrálem oné d. rovnice.

   Důkaz věty, že vlastní disperse tvoří spojitou grupu o 3 parametrech. Reprezentace této grupy a její struktura. (5. 12., 12. 12.)

Původní plán semináře na tento rok nebyl z důvodu zařazení nových výsledků z teorie dispersí zcela splněn. Citujme z předávacího protokolu za rok 1952:

Probraná látka vyčerpává původní plán asi na 90%, avšak naproti tomu jej podstatně překračuje v jiném směru. V rámci tohoto výzkumného úkolu jsem našel mnoho nových výsledků, které jsem sepsal v práci s názvem: „O oscilujících integrálech diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu" a rukopis (56 stran) jsem předložil Ústřednímu ústavu matematickému v Praze. Podle mého mínění jde o podstatný přínos ke klasické theorii a o výsledky užitečné pro aplikace. Proto jsem považoval za účelné seznámit své spolupracovníky s nalezenými výsledky co nejdříve a upozornit je na možnosti dalších výzkumů v tomto směru. Skutečně již na tomto základě některé vědecké práce vznikly a připravují se k publikaci (Dr. Švec, Nové vlastnosti integrálů diferenciálních rovnic lineárních 4. řádu; Dr. Greguš, Aplikace theorie dispersí na řešení okrajových problémů 2. řádu). Vzhledem k zařazení těchto nových výkladů do plánu jsem považoval za účelné odložit do příštího roku původně plánované studium diferenciální rovnice Thomas-Fermiovy a rovnice Schrödingerovy (asi 1/10 celkového plánu).

Publikační činnost členů semináře:

- M. Švec, *K problému jednoznačnosti integrálov systému lineárnych diferenciálnych rovníc.* Mat.-fyz. sborník SAV, 1952, 3–22.

Poznámka:

Kromě vědecko-výzkumného úkolu Ma-6 *Studium speciálních vlastností diferenciálních rovnic obyčejných se zřetelem k aplikacím* začal O. Borůvka pracovat také na úkolu *Příprava kritického vydání některých spisů Matyáše Lercha.* Tento úkol byl také plněn formou seminářů, jichž se zúčastňovali mnohdy stejní členové jako semináře o diferenciálních rovnicích. Jmenujme například J. Čermáka, V. Radochovou nebo L. Franka. Tento úkol byl splněn a definitivně ukončen v roce 1956 (viz činnost semináře v roce 1956).

4.3 Činnost semináře v roce 1953

I. pololetí 1953:

V I. pololetí bylo vykonáno 10 schůzí semináře (30. 1., 5. 2., 27. 2., 13. 3., 31. 3., 30. 4., 14. 5., 4. 6., 12. 6., 24. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 12 členů.

Dne 12. 6. přednášel M. Zlámal o podmínkách postačujících k tomu, aby nelineární diferenciální rovnice

$$x'' + f(x)x' + g(x) = p(t),$$

v níž p značí periodickou funkci, měla jedno periodické řešení a všechna ostatní k němu konvergovala pro $t \to \infty$. Důkaz uvedl ve speciálním případě, kdy je funkce $f(x)$ konstantní.

Ve všech ostatních seminářích přednášel O. Borůvka. Uveďme stručně hlavní témata přednášek:

1. Přehled o probrané části teorie dispersí 1. druhu rovnice

$$y'' = Q(x)y. \qquad (a)$$

Studium diferenciální rovnice dispersí 1. druhu

$$\sqrt{|\xi'|}(\frac{1}{\sqrt{|\xi'|}})'' + \xi'^2 Q(\xi) = Q(x). \qquad (b)$$

Transformace rovnice (b) na symetrický tvar

$$Q(\xi)\xi'(x) + \frac{1}{4}(\frac{1}{\xi'(x)})'' = Q(x)x'(\xi) + \frac{1}{4}(\frac{1}{x'(\xi)})'',$$

přičemž $x(\xi)$ je funkce inverzní k $\xi(x)$ a argumenty x, ξ jsou vázány vztahy $\xi = \xi(x)$, $x = x(\xi)$. Dále byla podána věta vyjadřující souvislost mezi řešeními rovnic (a) a (b) a důkaz věty o existenci integrálů rovnice (b). (30. 1., 5. 2.)

2. Explicitní vyjádření dispersí 1. druhu ve tvaru $\xi(x) = \alpha^{-1}[A(x)]$. Popis základních vlastností funkcí α, β. Poznámky a náměty ke studiu funkcí α, β a funkce $\varphi = \alpha - \beta$, například odvození integrální rovnice pro funkci cotg$\varphi(x)$. (27. 2., 13. 3.)

3. Studium asymptotických vlastností integrálů rovnice (a) v případě, že pro k, $\tau > 0$ a pro dosti velká x a $t \in [x, x + \frac{k}{-Q(x)}]$ platí první a případně i druhá nerovnost:

$$\left|\frac{Q(t)}{Q(x)} - 1\right| < \tau; \qquad \left|\frac{Q'(t)}{Q'(x)} - 1\right| < \tau.$$

Odvození mnoha nerovností, jež platí za výše uvedených předpokladů, například nerovnosti

$$\frac{\pi}{(1+\tau)\sqrt{-Q(x)}} < \varphi(x) - x < \frac{\pi}{(1-\tau)\sqrt{-Q(x)}},$$

přičemž φ značí základní centrální dispersi 1. druhu. (31. 3., 30. 4., 14. 5.)

4. Pojem hustoty posloupnosti intervalů; regulární konvergence funkce do ∞. Armelliniova věta o stabilitě integrálu $y(x) = 0$ rovnice (a). (4. 6.)

5. Asymptotické vlastnosti integrálů nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu v případě, že její koeficienty mají vlastní limity. Rozšíření výsledků na diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = \varphi(x),$$

v níž $a_1, \ldots, a_n$ značí konstanty, $a_n \neq 0$ a φ spojitou funkci mající pro $x \to \infty$ vlastní limitu. (24. 6.)

II. pololetí 1953:

Ve II. pololetí byly vykonány celkem 4 schůze semináře (21. 10., 4. 11., 25. 11., 16. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 12 členů. Původně byly plánovány ještě dvě schůze, avšak nekonaly se jednak pro nemoc O. Borůvky a jednak proto, že byly na vysokých školách vyhlášeny dodatečně prázdniny.

Dne 25. 11. přednášel M. Švec o teorii dispersí integrálů diferenciální rovnice $y^{(4)}+Q(x)y = 0$. O. Borůvka k této práci poznamenává: *Dr. Švec našel důležité souvislosti mezi dif. rovnicí* $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ *a dif. lineárními rovnicemi 2. řádu. Pomocí těchto souvislostí zejména rozšířil moji teorii dispersí na dif. rovnici* $y^{(4)} + Q(x)y = 0$.

V ostatních seminářích přednášel O. Borůvka. Hlavním tématem bylo studium asymptotických vlastností integrálů systémů lineárních diferenciálních rovnic. Látka byla probírána podle Perronovy práce *Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. I., II.* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 142 (1913), Bd. 143 (1913).

Publikační činnost členů semináře:

- O. Borůvka, *О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка.* Czech. Math. J. 3 (78), 1953, 199–255.
- M. Zlámal, *Über die Eigenwertaufgabe bei der Differentialgleichung* $y^{(n)} + \lambda A(x)y = 0$. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 345, 1953.
- M. Zlámal, *Об одном критерии устойчивости Ляпунова.* Czech. Math. J. 3 (78) (1953), 257–264.
- M. Zlámal, *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen.* Math. Nachrichten 10. Band, 1953, 169–174.

Poznámka:

V roce 1953 se O. Borůvka zúčastnil VIII. sjezdu polských matematiků ve Varšavě, kde přednesl referát s názvem *Propriétés nouvelles des intégrales des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

4.4 Činnost semináře v roce 1954

I. pololetí 1954:

V I. pololetí se konalo 7 schůzí semináře (17. 2., 3. 3., 17. 3., 31. 3., 4. 5., 20. 5., 23. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 9 členů.

Hlavním tématem přednášek bylo pokračování ve studiu asymptotických vlastností integrálů systémů lineárních diferenciálních rovnic podle Perronovy práce v sv. 143 (1913) a dále studium některých vlastností nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

II. pololetí 1954:

Ve II. pololetí byly vykonány celkem 2 schůze semináře (25. 10., 8. 11.), jichž se průměrně zúčastňovalo 14 členů. Další schůze se z důvodu nemoci O. Borůvky nekonaly.

V těchto seminářích byly probírány vlastnosti nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Byla probrána věta o oddělování kořenů integrálů diferenciální rovnice $f(x, y, y', y'') = 0$, porovnávací teorémy, věty o jednoznačnosti a okrajové problémy pro diferenciální rovnici $y'' = f(x, y, y')$.

Publikační činnost členů semináře:

- M. Greguš, *Aplikácia disperzií na okrajový problém druhého rádu.* Mat.-fyz. Čas. SAV, 1 (1954), 27–37.
- M. Švec, *Über einige neue Eigenschaften der oszillatorischen Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung.* Czech. Math. J. 4 (79) (1954), 75–94.
- M. Zlámal, *Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen.* Czech. Math. J. 4 (79) (1954), 95–103.

V souvislosti s plněním těchto úkolů vzniklo v posledním čase pod mým vedením několik vědeckých prací, které byly již předloženy k uveřejnění, zejména: O rozšíření theorie dispersí na dif. lineární rovnice 4. řádu (M. Švec), O zobecnění Floquetovy theorie k určení tvaru integrálů dif. lineárních rovnic 2. řádu (M. Laitoch), O oscilačních kritériích pro dif. lineární rovnice 2. řádu (M. Laitoch), O splynutí n-tých centrálních dispersí 1. a 2. druhu příslušných k dif. rovnici $y'' = Q(x)y$ (M. Laitoch), O kořenových vlastnostech integrálů systému dvou dif. lineárních rovnic 1. řádu (S. Krohová-Šantavá), O asymptotickém chování integrálů d. lineární rovnice 3. řádu (M. Ráb). Mimo těchto hotových prací je několik pojednání mých spolupracovníků blízko ukončení.

Poznámky:

1. O. Borůvka proslovil referát na III. valném shromáždění ČSAV v Praze ve dnech 12. – 15. 4. 1954 s názvem *Teorie dispersí a její aplikace*. Referát obsahoval některé výsledky o dispersích z práce z roku 1953. Dále zde uvedl některé aplikace teorie dispersí týkající se řešení okrajových problémů 2. řádu, rozšíření Floquetovy metody k určení fundamentálního systému na diferenciální rovnice tvaru $y'' = Q(x)y$, a poukázal na pokrok v teorii lineárních diferenciálních rovnic 4. řádu v souvislosti se zmíněnou teorií.

2. V roce 1954 vyšla Borůvkova práce *Poznámka k použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty.* (Čas. pěst. mat. fys. 79, 1954, 151–155).

   Práce se týká systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Obyčejně se v učebnicích tento případ řeší tak, že transformací se systém převede na nový, kde místo původní matice koeficientů vystupuje Weierstrassův kanonický tvar této matice. Vedle Weierstrassovy teorie matic existuje však Weyrova teorie. Prof. Borůvka ukazuje, jak lze na řešení systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty aplikovat Weyrovu teorii. Tento způsob má tu výhodu, že vede k přehledným explicitním vzorcům pro integrály, vyjadřujícím algebraickou povahu problému. [A1]

4.5 Činnost semináře v roce 1955

I. pololetí 1955:

V I. pololetí se konalo celkem 5 schůzí semináře (28. 2., 14. 3., 28. 3., 14. 4., 25. 4.), jichž se průměrně zúčastňovalo 18 členů.

Ve všech seminářích přednášel O. Borůvka. V prvních dvou dokončil důkaz věty (Scorza-Dragoni) o řešení okrajového problému pro nelineární diferenciální rovnici $y'' = f(x, y, y')$ a dále se věnoval novým výsledkům ve své teorii transformací.

Hlavní tématem však bylo studium vlastností dif. lineárních rovnic 2. řádu v souvislosti s transformacemi integrálů. Obecná theorie transformace integrálů dif. lineárních rovnic 2. řádu vznikla před 120 lety (E. E. Kummer), avšak od té doby podstatně nepokročila. V novějších učebnicích o dif. rovnicích se neuvádí, pravděpodobně proto, že dosavadní theorie potřebuje revisi. V seminářích jsem probral hlavní rysy svojí theorie, která zejména obsahuje existenční theorémy a věty o unicitě „ve velkém“. Tato theorie umožňuje nový přístup ke studiu nulových a extrémních hodnot integrálů, asymptotických vlastností, okrajových problémů aj.

Hlavní výsledky je možno shrnout do následujících bodů:

1. Jsou dány dvě diferenciální rovnice 2. řádu

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad \ddot{Y} = Q(T)Y \qquad (A),$$

   jejichž koeficienty q, Q jsou spojité funkce v otevřených intervalech j, J. K těmto rovnicím přiřadíme dvě nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad\qquad -\{x, T\} + Q(x)\dot{x}^2 = Q(T). \qquad (B)$$

   Každá dvě čísla $t \in j$, $T \in J$, která jsou vzorem a obrazem v nějakém prostém zobrazení intervalu j na interval J, nazýváme *sdružená* (vzhledem k tomuto zobrazení).

   Když X je řešením dif. rovnice (b), definovaným v nějakém intervalu $i \subset j$, pak inversní funkce x, definovaná v intervalu $I = X(i) \subset J$, je řešením dif. rovnice (B). Každá dvě vzájemně inversní řešení X, x dif. rovnic (b), (B) splňují v každých dvou (vzhledem k tomuto zobrazení) sdružených číslech t, T rovnici:

$$Q(X)X' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X'}\right)'' = q(x)\dot{x} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot}.$$

2. Je-li U integrál rovnice (A) a X integrál rovnice (b), definovaný v intervalu $i \subset j$, pak funkce

$$u(t) = \frac{U(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

   je integrálem rovnice (a), který je určen příslušnými cauchyovskými počátečními podmínkami. Analogicky pro opačnou transformaci.

Dále je uveden vztah mezi hodnotami integrálů u, U v každých dvou sdružených bodech $t \in i, T \in I$

$$\frac{U(X)}{\sqrt[4]{|X'|}} = \frac{u(x)}{\sqrt[4]{|\dot{x}|}}$$

a vztah mezi hodnotami derivací u', U'.

3. Existenční věta o integrálech rovnic (b), (B) a věta o jednoznačnosti řešení.

   Vcelku lze říci, že o integrálech dif. rovnice (b) platí existenční theorém „ve velkém“ s cauchyovskými počátečními podmínkami a věta o unicitě. Jsou-li známa řešení dif. rovnic (a), (A), redukuje se integrace dif. rovnice (b) na integraci jediné dif. rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými. Až na jisté jednoduché výjimky, existuje ke každým dvěma integrálům u, U dif. rovnic (a), (A), integrál X dif. rovnice (b), který je vzájemně transformuje podle vzorce

$$u(t) = \frac{U(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}.$$

II. pololetí 1955:

Ve II. pololetí byly vykonány 3 schůze semináře (14. 11., 29. 11., 13. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 18 členů.

Hlavním tématem bylo studium vlastností lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v souvislosti s transformacemi integrálů. Bylo pokračováno ve výkladu analytické části teorie transformací integrálů lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, jejíž základy byly předmětem studia v I. pololetí. Uveďme hlavní výsledky:

1. *Budiž $i \subset j$ definiční interval nejširšího řešení*[6] *X splňujícího dané počáteční podmínky t_0; X_0, X_0', X_0'' a $I \subset J$ interval jeho hodnot. Intervaly i, I se dají určit pomocí hodnot prvních fásí α, $\mathcal{A}$ vhodných uspořádaných dvojic integrálů dif. rovnic (a), (A); obsahují týž počet čísel konjugovaných s čísly t_0, X_0 a sahají (v jistém smyslu) až ke koncům intervalů j, J. Současně platí explicitní vzorce vyjadřující v intervalech i, I řešení X a inversní funkci x:*

$$X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t)), \qquad x(T) = \alpha^{-1}(\mathcal{A}(T)).$$

2. *Dva dané integrály u, U dif. rovnic (a), (A) lze vždy vzájemně transformovat podle vzorců*

$$u(t) = \eta\frac{U(X(t))}{\sqrt{|X'(t)|}}, \qquad U(T) = \eta\frac{u(x(T))}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}},$$

   při čemž X značí vhodné nejširší řešení dif. rovnice (b), x funkci inversní a η $+1$ nebo -1. Dokonce lze se širokou libovůlí předepsat počáteční hodnotu X_0 nejširšího řešení X. Obecně jsou právě dvě taková nejširší řešení, jedno rostoucí a druhé klesající.

3. Odvození transformací prvních derivací integrálů rovnic (a), (A).

[6] Pojem *nejširšího řešení* se zde užívá pro dnešní terminologií vyjádřený pojem *maximální řešení*.

Publikační činnost členů semináře:

- M. Greguš, *O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu.* Mat.-fyz. Čas. SAV, 5 (1955), 73–85.
- M. Greguš, *O niektorých nových vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice* $y''' + Qy' + Q'y = 0$. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 365 (1955), 1–18.
- M. Laitoch, *Расширение метода Флоке для определения вида фундаментальной системы решений дифференциального уравнения второго порядка* $y'' = Q(x)y$. Czech. Math. J. 5 (80) (1955), 164–174.
- M. Laitoch, *Sur une théorie des critères comparatifs sur l'oscillation des intégrales de l'équation différentielle* $u'' = P(x)u$. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 365 (1955), 255–266.
- M. Ráb, *Oscilační vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu.* Práce brněnské základny ČSAV, 27 (1955), 349–360.
- S. Šantavá, *Об основных свойствах интегралов систем двух дифференциальных уравнений первого порядка.* Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 369 (1955), 1–21.
- J. Škrášek, *Fundamentální systém řešení zobecněné homogenní Eulerovy diferenciální rovnice n-tého řádu.* Práce brněnské základny ČSAV, 27 (1955), 361–367.
- M. Švec, *Sur les dispersions des intégrales de l'équation* $y^{(4)} + Q(x)y = 0$. Czech. Math. J. 5 (80) (1955), 26–60.
- M. Zlámal, *Eine Bemerkung über die charakteristische Determinante einer Eigenwertaufgabe.* Czech. Math. J. 5 (80) (1955), 175–179.
- M. Zlámal, *Studium oscilačních a asymptotických vlastností řešení lineárních diferenciálních rovnic.* (Kandidátská práce, schválena 27. 4. 1955)

Poznámka:

V roce 1955 O. Borůvka vykonal přednáškový zájezd do Polska, kde proslovil několik referátů o teorii dispersí, teorii transformací, o jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ a o teorii grup (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

V témže roce se také zúčastnil IV. sjezdu československých matematiků v Praze, kde proslovil sdělení na téma *Transformace integrálů diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.*

4.6 Činnost semináře v roce 1956

I. pololetí 1956:

V I. pololetí se konalo 5 schůzí semináře (20. 3., 3. 4., 18. 4., 4. 5., 22. 5.), jichž se průměrně zúčastňovalo 13 členů.

Ve dnech 20. 3. a 3. 4. přednesl M. Greguš některé svoje výsledky týkající se vztahů mezi integrály lineární diferenciální rovnice 3. řádu a rovnice k ní adjungované a odvození lineární rovnice 3. řádu se všemi integrály oscilatorickými.

Ve dnech 3. 4. a 18. 4. přednesl M. Švec referát o článku G. Sansone (Ann. R. Scu. Norm. Sup., Pisa, (2), 11, 1942) v souvislosti se svými výsledky o lineárních diferenciálních rovnicích 4. řádu.

V dalších dvou seminářích pokračoval O. Borůvka v teorii transformací integrálů lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Uvedl aplikace týkající se určení struktury koeficientu $q(t)$ v diferenciální rovnici

$$y'' = q(t)y, \qquad t \in j \qquad\qquad (a)$$

ve všech případech, kdy je předepsán oscilatorický charakter integrálů.

Jde o výsledky nové a definitivní, které byly též předmětem mojí přednášky v plenární schůzi konané v rámci sjezdu rumunských matematiků v Bukurešti t. r. Na př. platí tyto věty:

1. *Každý integrál dif. rovnice (a) má v intervalu j nejvýše jeden kořen tehdy a jen tehdy, když funkce q je zápornou schwarzovskou derivací nějaké funkce X, která v intervalu j roste a v daném čísle $t_0 \in j$ splňuje relace $X(t_0) = 0$, $X'(t_0) = 1$.*

2. *Integrály dif. rovnice (a) oscilují, t.j. mají v intervalu j nekonečně mnoho kořenů, když a jen když funkce q je tvaru $q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t)$, přičemž funkce X roste od $-\infty$ do $+\infty$.*

Další věty se týkají struktury funkce q v případech, že každý integrál dif. rovnice (a) má vpravo nebo vlevo od daného čísla $t_0 \in j$ daný počet m nebo $m + 1$ kořenů.

II. pololetí 1956:

Ve II. pololetí byly vykonány 4 schůze semináře (30. 10., 13. 11., 4. 12., 18. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 19 členů.

Ve všech seminářích přednášel O. Borůvka.

Hlavním tématem bylo studium vlastností lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v souvislosti s teorií transformací integrálů. Především byly dokončeny aplikace této teorie na určení struktury (spojitého) koeficientu $q(t)$ v rovnici (a) ve všech případech, kdy je předepsán oscilatorický charakter integrálů.

Dalším předmětem studia byly úvahy směřující k určení topologických zobrazení dvou otevřených intervalů, která zachovávají konjugovaná čísla. Podrobněji řečeno jde o tento problém: Jsou dány dif. rovnice

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A),$$

v nichž q, Q jsou spojité funkce v otevřených intervalech j, J. Mají se určit topologická zobrazení intervalu j na interval J vyznačující se tím, že obrazy každých dvou konjugovaných čísel v intervalu j vzhledem k dif. rovnici (a) jsou konjugovaná čísla v intervalu J vzhledem k dif. rovnici (A). Řešení tohoto problému je v souvislosti s určením nejširších řešení dif. rovnice

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t),$$

která jsou definována v intervalu j a jejichž hodnoty tvoří interval J.

Řešení uvedeného problému vyžaduje řadu předběžných úvah o dif. rovnicích (a), které jsou daného typu (m) (m přirozené, ≥ 2), tj. které mají integrály s maximálním počtem m kořenů. O dif. rovnicích typu (m) jsem zavedl několik nových pojmů, které jsou pro teorii těchto dif. rovnic nutné (např. pojem levého hlavního čísla, což je dolní hranice všech čísel v intervalu j, k nimž existují zleva konjugovaná čísla, pojem pravého hlavního čísla, pojem speciální dif. rovnice (a), aj.) V našich schůzích byly studovány vlastnosti těchto pojmů, přičemž se podstatně uplatnily vlastnosti centrálních dispersí 1. druhu. Celkově lze říci, že v II. pololetí 1956 byly získány potřebné poznatky, aby bylo možno přistoupit k řešení uvedeného problému, což je v plánu naší práce pro příští rok.

Publikační činnost členů semináře:

- O. Borůvka, *Замечания к рецензии М. И. Еóльшина моеóй статьи „О колеóблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка“.* Czech. Math. J. 6 (81), 1956, 431–433.
- O. Borůvka, *Sur la transformation des intégrales des équations differentielles linéaires ordinaires du second ordre.* Ann. Mat. Pura Appl., S. IV, T. XLI, 1956, 325–342.
- M. Greguš, *Diferenciálna rovnica tretieho rádu tvaru $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$ so všetkými integrálmi oscilatorickými.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 1 (1956), 41–47.
- M. Greguš, *O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 1 (1956), 265–272.
- Z. Hustý, *O iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic.* Sborník VŠZ Brno, 4, 1956, 1–16.
- M. Laitoch, *Совпадение центральных дисперсий 1-го и 2-го рода, соответствуюших дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = Q(x)y$.* Czech. Math. J. 6 (81) (1956), 365–380.
- M. Laitoch, *Aplikace dispersí v oboru lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.* Čas. pěst. mat. 81, 1956, č.1, 111–112.
- M. Laitoch, *O jistých řešeních funkční rovnice $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$.* Čas. pěst. mat. 81 (1956), 420–425.
- M. Laitoch, *Aplikace teorie dispersí v oboru homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.* (Kandidátská práce, schválena 6. 6. 1956)
- M. Ráb, *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichung dritter Ordnung.* Spisy přír. fak. MU, 374 (1956), 177–184.
- M. Ráb, *Asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální rovnice 3. řádu.* Spisy přír. fak. MU, 379 (1956), 441–454.
- M. Švec, *Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)y = 0$.* Czech. Math. J. 6 (81) (1956), 46–71.
- M. Zlámal, *Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Czech. Math. J. 6 (81), 1956, 75–93.

Poznámky:

1. V roce 1956 vyšla Borůvkova práce *Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ (Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica, 1956, 155–167). V ní se O. Borůvka vrací k problematice, které se věnoval v prvních letech činnosti semináře i ve svých univerzitních přednáškách. Jde o otázku jednoznačnosti řešení rovnice $y' = f(x, y)$ (nebo systému, značí-li y a f vektory). O. Borůvka nalézá velmi obecné kritérium, které zahrnuje v sobě řadu známých kritérií jako podmínku Montelovu, Peanovu, Bompianiho a Nagumovu. Ukázalo se také, že podmínka O. Borůvky je obecnější než známé kritérium Kamkeho uvedené v jeho knize *Differentialgleichungen reeller Funktionen.*

2. V tomto roce se O. Borůvka zúčastnil matematických sjezdů v Bukurešti a ve Vídni. V Bukurešti proslovil přednášku s názvem *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du* 2^{nd} *ordre* a ve Vídni přednášel o výsledcích své nové práce *Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

3. V roce 1956 ukončil O. Borůvka dlouhodobý úkol *Příprava kritického vydání některých spisů Matyáše Lercha*, který byl plněn od roku 1952 v rámci činnosti ÚÚM (později MÚ ČSAV, Matematické komise ČSAV) a MŠK.

   Výsledkem splnění předloženého úkolu je článek L. Franka, *O životě Matyáše Lercha* (Čas. pěst. mat. 78 (1953), 119–137), stať J. Škráška, *Seznam prací prof. Matyáše Lercha* (Čas. pěst. mat. 78 (1953), 139–148) a obsáhlá souborná práce, která se skládá ze šesti článků, jež se týkají jednotlivých úseků Lerchovy činnosti v oboru matematické analýzy: J. Čermák, *Lerchův přínos k obecné theorii funkcí*; J. Čermák, *Lerchův příspěvek k theorii nekonečných řad*; O. Borůvka, *Dílo Matyáše Lercha v theorii funkce gamma*; V. Radochová, *Lerchův přínos k theorii funkcí eliptických*; V. Radochová, *Lerchův přínos k integrálnímu počtu*; L. Frank, *Spor Matyáše Lercha s Alfredem Pringsheimem.* Tato souborná práce vyšla pod názvem *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analýzy* (Práce Brněnské základny ČSAV, XXIX (1957), 417–540).

4.7 Činnost semináře v roce 1957

I. pololetí 1957:

V I. pololetí se konalo 5 schůzí semináře (9. 4., 23. 4., 14. 5., 21. 5., 18. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 14 členů.

Dne 21. 5. přednášel host prof. A. Bielecki z Lublina o rovnicích paratingentních.

Ve dnech 9. 4. a 23. 4. přednášel V. Šeda o svých výsledcích, které se týkají přenesení teorie transformací integrálů lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu do komplexního oboru. V podstatě jde o studium diferenciální rovnice $-\{z, x\} + Q(z)z'^2 = q(x)$ za předpokladu, že Q, q jsou holomorfní funkce v jednoduše souvislých oblastech. Autorovy výsledky tvoří obsah jeho kandidátské práce, která byla v tomto roce předložena na Přírodovědecké fakultě MU.

Ve zbývajících dvou seminářích přednášel O. Borůvka o své teorii transformací. Pokračoval v řešení problému, který spočívá v určení topologických zobrazení dvou otevřených intervalů, která zachovávají konjugovaná čísla vzhledem k daným lineárním diferenciálním rovnicím 2. řádu.

Řešení tohoto problému velmi úzce souvisí s vlastnostmi prvních fází uspořádaných dvojic integrálů dif. rovnice $y'' = q(t)y$ (a). Pro první fáze jsem zavedl pojem tzv. okrajové charakteristiky, což jest uspořádaná trojice čísel (t, c_1, c_2), která v jistém smyslu popisuje chování první fáze na koncích intervalu. Dokázal jsem, že každá uspořádaná trojice čísel, jejíž čísla vyhovují jistým podmínkám, jest okrajovou charakteristikou vhodné první fáze dif. rovnice (a). Tato věta má pro řešení výše zmíněného problému, které bude ukončeno v II. pololetí, základní důležitost.

II. pololetí 1957:

Ve II. pololetí byly vykonány 4 schůze semináře (26. 11., 3. 12., 10. 12., 17. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 13 členů.

Schůze byly věnovány podání přehledu o nových výsledcích v oboru obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, kterých v poslední době dosáhli účastníci semináře. Výsledky se týkají asymptotických vlastností rovnic 2. a 4. řádu a některých otázek v souvislosti s teorií transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Přednášeli:

M. Zlámal (26. 11.) o asymptotickém chování integrálů rovnice $y'' + a(t)y' + y = 0$ v případě, že $a(t) \to \infty$ pro $t \to \infty$.

E. Barvínek (3. 12.) o zaměnitelnosti dispersí a integrálů rovnice $-\{X, t\} + Q_1(X)X'^2 = Q_2(t)$.

M. Švec (10. 12.) o asymptotickém chování integrálů rovnice $y^{(4)} + Q(t)y = 0$.

M. Ráb (17. 12.) o asymptotických vlastnostech integrálů rovnice $y'' + Q(t)y = 0$.

Publikační činnost členů semináře:

- O. Borůvka, *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre.* Bulletin Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R. 1 (49), 1957, 125–130.
- M. Greguš, *O lineárnej diferenciálnej rovnici tretieho rádu s konštantnými koeficientami.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 2 (1957), 61–66.
- M. Greguš, *О некоторых новых краевых проблемах дифференциальнoго уравнения третьего порядка.* Czech. Math. J. 7 (82) (1957), 41–47.
- M. Greguš, *Homogénny okrajový problém pre integrály lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 2 (1957), 219–228.
- M. Greguš, *O některých vlastnostech řešení lineární diferenciální rovnice 3. řádu.* (Kandidátská práce, schválena 14. 6. 1957)
- M. Ráb, *Poznámka k otázce o oscilačních vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)y = 0$.* Čas. pěst. mat. 82 (1957), 342–348.
- M. Ráb, *Oscilační a asymptotické vlastnosti integrálů lineární diferenciální rovnice 3. řádu.* (Kandidátská práce, schválena 27. 11. 1957)

- M. Šeda, *Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu v komplexnom obore.* Acta F. R. N. Univ. Comen. 5–6, Math. (1957), 229–254.
- V. Šeda, *Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu v komplexnom obore.* (Kandidátská práce, schválena 18. 12. 1957)
- M. Švec, *Sur une propriété des intégrales de l'équation* $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$. Czech. Math. J. 77 (82), 1957, 450–461.
- M. Švec, *O niektorých vlastnostiach integrálov diferenciálnych rovníc typu* $y^{(n)} + Q(xy) = Q''$. (Kandidátská práce, schválena 27. 11. 1957)
- M. Zlámal, *Über die Differentialgleichung* $\dot{y} + y = \ddot{y}^2$. Czech. Math. J. 7 (82) (1957), 26–40.

Poznámka:

V tomto roce se O. Borůvka zúčastnil matematického sjezdu v Berlíně a konference Spolku německých matematiků v Drážďanech.

Matematický sjezd v Berlíně se konal 21. 3. 1957 při příležitosti 250. výročí narození L. Eulera. O. Borůvka, jež byl jediným delegátem z Československa, přednášel na téma *Matyáš Lerch jako pokračovatel klasiků v theorii funkce gamma*.

Konference Spolku německých matematiků (DMV) se konala ve dnech 9. – 14. září a z Československa se jí zúčastnilo šest delegátů. O. Borůvka zde proslovil příspěvek týkající se řad rozkladů na množinách a jejich aplikací *Über Reihen von Zerlegungen auf Mengen und einige Anwendungen derselben*.

4.8 Činnost semináře v roce 1958

I. pololetí 1958:

V I. pololetí bylo vykonáno 5 schůzí semináře (18. 3., 1. 4., 15. 4., 6. 5., 23. 5.), jichž se průměrně zúčastňovalo 13 členů.

Schůze byly věnovány podání přehledu o nových výsledcích v oboru obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, kterých v poslední době docílili účastníci semináře. Výsledky se týkají rovnic n-tého řádu a oscilačních vlastností rovnic 2. a 3. řádu. Přednášeli:

M. Greguš (18. 3.) o vlastnostech řešení lineární diferenciální rovnice 3. řádu $y''' + 2A(x)y' + (A'(x) + b(x))y = 0$ v případě $A(x) < 0$.

Z. Hustý (1. 4. a 15. 4.) o lineárních diferenciálních rovnicích n-tého řádu. Vyložil pojmy lineárních invariantů, iterované rovnice a iterovaných semiinvariantů rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i(x) y^{(n-i)} = 0,$$

uvedl jejich vzájemné souvislosti a oscilační vlastnosti integrálů iterované rovnice.

M. Ráb (6. 5. a 23. 5.) o kritériích pro oscilaci integrálů rovnice $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

II. pololetí 1958:

Ve II. pololetí byly vykonány 3 schůze semináře (11. 11., 9. 12., 17. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 17 členů.

V seminářích konaných ve dnech 11. 11. a 9. 12. přednášel M. Zlámal o svých výsledcích o smíšeném problému pro hyperbolické rovnice s malým parametrem.

Dne 17. 12. přednášel J. Kurzweil z MÚ ČSAV v Praze o své teorii zobecněných diferenciálních rovnic. Nastínil také některé problémy v souvislosti s dřívějšími výsledky docílenými v teorii dispersí.

Publikační činnost členů semináře:

- E. Barvínek, *О свойстве заменительности дисперсий и решений дифференциального уравнения* $\sqrt{(|X'|)}(1/\sqrt{|X'|})'' + q(X)X'^2 = Q(t)$. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, No 393 (1958), 141–155.
- L. Frank, *O diferenciální rovnici $y'' = Q(x)y$, jejíž integrály mají ekvidistantní nulové body.* Sborník VUT v Brně, 1958, 91–96.
- M. Greguš, *Poznámka k oscilatorickým vlastnostiam riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 3 (1958), 23–28.
- Z. Hustý, *O některých vlastnostech homogenní lineární diferenciální rovnice pátého řádu.* Sborník VŠZ Brno, 1, 1958, 1–20.
- Z. Hustý, *Asymptotické vlastnosti integrálů homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu.* Čas. pěst. mat. 83 (1958), 60–69.
- Z. Hustý, *O některých vlastnostech homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu.* Čas. pěst. mat. 83 (1958), 202–213.
- Z. Hustý, *Колебательные свойства однородного дифференциального уравнения четвертого порядка.* Czech. Math. J. 8 (83) (1958), 62–75.
- M. Ráb, *Über lineare Perturbation eines Systems von linearen Differentialgleichungen.* Czech. Math. J. 8 (83) (1958), 222–229.
- M. Ráb, *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung* $y'' + A(x)y = 0$. Czech. Math. J. 8 (83) (1958), 513–519.
- M. Ráb, *O diferenciální rovnici* $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + w(x)]y = 0$. Mat.-fyz. Čas. SAV, 2, 8 (1958), 115–122.
- M. Švec, *Sur le comportement asymptotique des intégrales de l'équation* $y^{(4)} + q(x)y = 0$. Czech. Math. J. 8 (83), 1958, 243–244.

4.9 Činnost semináře v roce 1959

I. pololetí 1959:

V I. pololetí bylo vykonáno 5 schůzí semináře (7. 4., 21. 4., 5. 5., 16. 6., 30. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 14 členů.

V seminářích konaných ve dnech 7. 4. a 21. 4. přenášel J. Chrastina o geometrických metodách v teorii dispersí. Zabýval se otázkou určení všech lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu $y'' = q(t)y$ $(-\infty < t < \infty)$ se splývajícími centrálními dispersemi 3. a 4. druhu.

V ostatních seminářích přednášel O. Borůvka na téma *Úplné transformace lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.*

Zabýval jsem se tzv. úplnými transformacemi dif. lin. rovnic 2. řádu:

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A)$$

při čemž q, Q značí spojité funkce v nějakých otevřených intervalech $j = (a, b)$, $J = (A, B)$. V podstatě jde o tento problém: Mají se nalézt nutné a dostatečné podmínky, aby nelineární dif. rovnice 3. řádu:

$$(b) \qquad -\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad -\{x, T\} + Q(x)\dot{x}^2 = Q(T) \qquad (B)$$

měly úplná řešení a v případě, že tyto podmínky jsou splněny, mají se všechny úplné řešení určit. Úplným řešením dif. rovnice (b) nebo (B) se rozumí řešení definované v intervalu j popř. J a zobrazující tento interval na interval J popř. j. Přípravu k řešení tohoto problému jsem zčásti provedl již v letech 1956 a 1957. Letos jsem řešení ukončil, při čemž jsem se omezil na obecný případ, tj. na rovnice (a), (A) konečného typu s konjugovanými body. Výsledky svých úvah jsem předložil v květnu t. r. k uveřejnění v časopisu Ann. di mat. pura ed appl. v slavnostním svazku věnovaném prof. G. Sansoneovi.

II. pololetí 1959:

Ve II. pololetí byly vykonány 3 schůze semináře (25. 11., 10. 12., 22. 12.), jichž se průměrně zúčastňovalo 21 členů.

Ve všech seminářích pokračoval O. Borůvka ve výkladu své teorie úplných transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

Nyní jsem ukázal, že všechna rostoucí a rovněž všechna klesající úplná řešení rovnice (b) procházejí jistými pevnými body a vyplňují obory skládající se z vnitřků několika obdélníků. Množina všech rostoucích a rovněž klesajících úplných řešení dif. rovnice (b) je ekvivalentní s množinou všech reálných kladných čísel a dá se uvést řada vlastností zobrazení realisujících tuto ekvivalenci. To pak vede k četným důsledkům umožňujícím popis struktury množiny úplných řešení dif. rovnice (b). V případě, že dif. rovnice (a), (A) splývají, tvoří úplná řešení dif. rovnice (b) jednoparametrickou abelovskou grupu. V těchto úvahách míním pokračovat v I. pololetí 1960.

Publikační činnost členů semináře:

Řada spolupracovníků se zabývala tématy z oboru dif. lin. rovnic 2. řádu a vyšších řádů v reálném a komplexním oboru. Odb. asist. J. Chrastina došel k významným výsledkům týkajícím se porovnání dosahu dvou velmi obecných kriterií jednoznačnosti dif. rovnice $y' = f(x, y)$ (jedno z nich je obecné kriterium Kamkeovo, které se ukazuje jako slabší).

- E. Barvínek, *Aplikace teorie transformací diferenciálních rovnic 2. řádu.* (Kandidátská práce, schválena 18. 2. 1959)
- L. Frank, *Příspěvek k otázce jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice* $y' = f(x, y)$. Sborník VUT v Brně, 1959, 31–35.
- M. Greguš, *Poznámka o disperziách a transformáciách diferenciálnej rovnice tretieho rádu.* Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 4 (1959), 205–211.
- M. Greguš, *Oscillatorische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung* $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$, *wo* $A = A(x) \leq 0$ *ist.* Czech. Math. J. 84 (1959), 416–428.
- Z. Hustý, *Homogenní lineární diferenciální rovnice vyšších řádů.* (Kandidátská práce, schválena 18. 2. 1959)
- Z. Hustý, *O ekvivalenci a iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic.* Čas. pěst. mat. 84 (1959), 475–476.
- Z. Hustý, *Některé vlastnosti homogenní lineární diferenciální rovnice* n*-tého řádu.* Čas. pěst. mat. 84 (1959), 476–478.
- M. Laitoch, *O ortogonalitě řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu* $y'' = q(x)y$. Sborník Vys. školy Pedagog. Olomouc, VI, 3 (1959), 7–22.
- M. Ráb, *Kriterien für die Oscillation der Lösungen der Differentialgleichung* $[p(x)y']' + q(x)y = 0$. Čas. pěst. mat. 84 (1959), 335–370.
- S. Šantavá, *Transformace integrálů systému dvou diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu.* Sbor. Voj. Akad. A. Z. Brno, 8 (50) (1959), 3–14.
- V. Šeda, *O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice* $y'' = Q(x)y$, $Q(x) \neq 0$ *je celá funkcia.* Acta. F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica, 1959, 223–253.

Poznámka:

O. Borůvka se zúčastnil jako delegát ČSAV oslav, které upořádala Německá akademie věd v Berlíně na počest J. P. G. Lejeune-Dirichleta a proslovil při této příležitosti přednášku s názvem *Über einige Ergebnisse der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

4.10 Činnost semináře v roce 1960

I. pololetí 1960:

V I. pololetí bylo vykonáno 5 schůzí semináře (6. 4., 20. 4., 4. 5., 16. 5., 30. 5.), jichž se průměrně zúčastňovalo 16 členů.

V prvním semináři dokončil O. Borůvka přednášky o teorii úplných transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Navázal na výsledky, které byly probrány ve II. pololetí 1959. V nich šlo o úplné transformace rovnic

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A)$$

za předpokladu, že rovnice (a), (A) jsou konečného typu (m), $m \geq 2$, obecného druhu.

Nyní jsem popsal strukturu množiny $\mathfrak{M}$ všech úplných rostoucích (klesajících) řešení dif. rovnice (b):

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t). \qquad (b)$$

Zejména jsem ukázal, že v množině $\mathfrak{M}$ existují spočetné husté podmnožiny $\mathfrak{M}^\star$, které se v případě ohraničenosti integrálů dif. rovnic (a), (A) vyznačují tím, že každé úplné řešení $X \in \mathfrak{M}$ se dá s libovolnou přesností stejnoměrně aproximovat vhodným rostoucím (klesajícím) řešením z množiny $\mathfrak{M}^\star$.

V dalších seminářích přednášeli o svých výsledcích tito členové:

M. Ráb (20. 4.) o asymptotických vzorcích pro řešení rovnice $y'' + q(x)y = 0$.

J. Chrastina (4. 5.) o vzájemném vztahu obecných kritérií K (Kamke) a B (Borůvka) pro lokální jednoznačnost řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$.

V. Šeda (16. 5.) o nulových bodech řešení rovnice $v'' = G(z)v$ v komplexním oboru.

M. Švec (30. 5.) o asymptotických vzorcích pro řešení diferenciálních rovnic 3. a 4. řádu.

II. pololetí 1960:

Ve II. pololetí se v souvislosti s reorganizací vědeckovýzkumných úkolů v oboru matematiky na léta 1961 – 1965 schůze semináře nekonaly.

Publikační činnost členů semináře:

- O. Borůvka, *Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre.* Ann. Mat. Pura Appl., XLIX, 1960, 229–252.
- J. Chrastina, *Speciální vlastnosti integrálních křivek některých diferenciálních rovnic.* (Kandidátská práce, schválena 24. 10. 1960)
- M. Laitoch, *О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений.* Czech. Math. J. 10 (85) (1960), 258–270.
- M. Laitoch, *Über die Nullstellenanzahl der Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Q(t)y$.* Acta. Univ. Palackianae Olomucensis, 3 (1960), 5–9.
- M. Laitoch, *К проблеме ортогональных систем функций с весом.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, 3 (1960), 11–28.
- J. Mařík, M. Ráb, *Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = A(x)y$ im nichtoszillatorischen Fall.* Czech. Math. J. 10 (85) (1960), 501–521.
- J. Moravčík, *Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc.* Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Math. 6, 1960, 327–339.
- M. Ráb, *O jistém zobecnění Sansonovy věty o neoscilaci integrálů diferenciální rovnice* $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + w(x)]y = 0$. Mat.-fyz. Čas. 1, 10 (1960), 3–8.
- S. Šantavá – Krohová, *Transformace integrálů systémů dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.* (Kandidátská práce, schválena 24. 10. 1960)

Poznámka:

V srpnu 1960 se O. Borůvka zúčastnil II. Maďarského matematického sjezdu v Budapešti a v listopadu 1960 oslav 150. výročí založení Humboldtovy univerzity a 250. výročí založení Charité v Berlíně.

V Budapešti proslovil přednášku s názvem *Neuere Ergebnisse auf dem Gebiet der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* a v Berlíně na matematickém sjezdu, jenž se konal v rámci výše zmíněných oslav proslovil přednášku *Über die Bedeutung und Anwendungen von Zerlegungen in Mengen in der Gruppoid- und Gruppentheorie* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

5 O vzniku transformační teorie (do roku 1960)

V úvodu celé práce jsme se zmínili o tom, že koncem války se mezi matematiky začínaly vést diskuse o zaměření a vývoji vědecké práce po válce. Těmito otázkami se zabývala především skupina pražských matematiků kolem F. Vyčichla, za nimiž se koncem války vypravil i O. Borůvka. Citujme jeho vlastní úvahy z [B17]:

Tehdy nebyla vědecká činnost žádným způsobem řízena, odpovědnost za svou práci nesl každý profesor osobně, a já jsem neměl dobrý přehled o tom, jak to vcelku u nás vypadá a v jakém směru by měla vědecká práce v matematice u nás pokračovat.

Poznamenejme, že před válkou se O. Borůvka zabýval kromě prvních prací z matematické analýzy a práce z teorie grafů hlavně diferenciální geometrií a později algebrou, teorií grup a grupoidů. Je možné, že mu tato témata připadala z jeho pohledu již vyčerpaná. K tomu jistě přispělo i to, že v oblasti algebry působil V. Kořínek, který sepisoval rozsáhlé *Základy algebry* a diferenciální geometrie měla také svého představitele, jímž byl Václav Hlavatý. I některá další témata byla zastoupena významnými matematiky jako byli V. Jarník, E. Čech, M. Kössler nebo M. Katětov. A tak O. Borůvka hledal nové téma svého budoucího vědeckého bádání.

Mluvil jsem hlavně s profesorem, tehdy snad ještě docentem – to si nevzpomínám – Františkem Vyčichlem, kterého jsem si velice vážil. Věc jsme dokonale probrali a došli jsme zejména k závěru, že je naprosto nutné, aby se u nás začala pěstovat teorie diferenciálních rovnic, která je důležitá po stránce aplikační a která u nás byla před válkou dost zanedbávána. [B17]

V části *Pedagogická činnost* byla hlavní pozornost věnována činnosti matematického semináře (pro studenty), neboť ho lze považovat za prvopočátek semináře pro studium diferenciálních rovnic.

Ve školním roce 1945/46 byla v tomto v semináři (pro studenty) probírána teorie grup podle knihy O. Borůvky *Úvod do teorie grup*. Ve školním roce 1946/47 zde byly probírány vybrané statě z teorie diferenciálních rovnic. V každém z těchto seminářů referoval některý z posluchačů na zadané téma, jímž byla nejčastěji určitá část z prací E. Kamkeho, G. Sansoneho nebo F. Montela. V roce 1947/48 byla probírána opět teorie grup a v roce 1948/49 teorie diferenciálních rovnic.

Od počátku školního roku 1948/49 začaly svoji činnost pod vedením O. Borůvky semináře sekce pro klasickou analýzu zaměřené výhradně na studium diferenciálních rovnic.

Který rok tedy lze považovat za rok vzniku semináře pro studium diferenciálních rovnic? Školní rok 1946/47 nebo školní rok 1948/49?

První varianta, školní rok 1946/47, vychází z činnosti semináře pro studenty. K ní se přiklání autoři většiny jubilejních článků o O. Borůvkovi, kteří udávají vznik semináře v roce 1946, například [A1], [A12], [A19] nebo [A25]. Zřejmě za nejdůležitější z nich lze považovat článek [A1], neboť většina ostatních se na něj odkazuje. Velmi pádným důvodem přiklonění se k této variantě je však vlastní názor O. Borůvky. Ten ve svých přednáškách [B3] a [B4] uvádí:

... Seminář pro studium diferenciálních rovnic, který vedu sám od roku 1947, ...

Druhá varianta, rok 1948/49, vychází až z činnosti semináře sekce pro klasickou analýzu. K této možnosti se přiklání například M. Novotný v [A14].

Z výše zmíněných důvodů budeme v této práci za rok vzniku semináře považovat školní rok 1946/47.

V roce 1951 plnili členové semináře v čele s O. Borůvkou výzkumný úkol *Studium obtížnějších kapitol o diferenciálních rovnicích*[7] a v letech 1952 – 1960 vědecko-výzkumný úkol *Studium speciálních vlastností diferenciálních rovnic obyčejných se zřetelem k aplikacím.*[8]

Práce na zmíněných úkolech probíhala formou pracovních seminárních schůzí, jichž se konalo přibližně 10 ročně a jichž se pravidelně zúčastňovali matematikové z vysokých škol brněnských i mimobrněnských.

V prvních letech byla činnost semináře pro studium diferenciálních rovnic věnována spíše přípravě vědecké a výzkumné práce a formulaci problémů než vlastnímu badatelskému úsilí.

Citujme část přednášky s názvem *O vývoji prací v oboru diferenciálních rovnic na zdejší fakultě* [B6], kterou O. Borůvka proslovil na sjezdu absolventů fakulty dne 20. 11. 1959.

V té době jsme studovali hlavně Perronovy práce o průběhu integrálních křivek diferenciálních rovnic 1. řádu $y' = f(x, y)$ *v okolí singulárních bodů, práce téhož autora o asymptotických vlastnostech integrálů systémů diferenciálních lineárních rovnic a též spisy jiných autorů o rozmanitých tématech vyžadujících hlubších znalostí o dif. rovnicích. Chtěl bych zdůraznit, že mám na mysli obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru.*

V průběhu tohoto studia jsme byli vedeni k lineárním diferenciálním rovnicím vyšších řádů, zejména k rovnicím druhého řádu. Je s podivem, že právě teorie diferenciálních lineárních rovnic n-tého řádu jakoby byla přeskočena při bouřlivém rozvoji moderní matematiky. Třebaže jde o úsek oboru diferenciálních rovnic, který v hlavních rysech byl vypracován již v první polovině minulého století a jímž se zabývala – ovšem tehdy v komplexním oboru – řada klasiků a jejich pokračovatelů, jmenuji na př. Eulera, Gausse, Laplacea, Kummera, Jacobiho, Sturma – přinesl pozdější vývoj v tomto směru nové poznatky v podstatě jenom v případě lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

[7]Tento úkol, jež byl vyhlášen v rámci pracovního plánu ÚÚM, byl v průběhu roku 1951 převzat Ministerstvem školství, věd a umění.

[8]Jedná se o dlouhodobý vědecko-výzkumný úkol z matematiky, zařazený do resortního plánu Ministerstva školství a kultury. V rámci reorganizace vědecko-výzkumných úkolů na léta 1961–65 v souvislosti se zařazením matematiky do státního plánu vědecko-výzkumných prací v III. pětiletce, byl úkol pro příští léta z resortního plánu MŠK vyčleněn a další práce v tomto směru byly od 1. 1. 1961 pojaty do státního plánu výzkumu. Vzhledem k tomu byl zmíněný resortní úkol ke dni 31. 12. 1960 ukončen.

Všimneme-li si dif. lineárních rovnic 2. řádu, vidíme, že mají důležité aplikace v otázkách fyzikálních a technických. Od nejjednodušších úloh klasické mechaniky, jako je analysa harmonického pohybu, k mnohem složitějším otázkám týkajícím se na př. vedení tepla, chvění tyčí a membrán nebo v problémech nebeské mechaniky, setkáváme se s těmito dif. rovnicemi zpravidla jako s ústředními místy obsahujícími odpověď na dané otázky. K tomu přistupuje, že teorie dif. lineárních rovnic 2. řádu je ovládána nevelkým počtem jednoduchých theorémů, takže jest jednoduchá a průhledná a přitom obsahově bohatá. Je přirozené, že při studiu theorie dif. lineárních rovnic n-tého řádu mají dif. lineární rovnice 2. řádu důležitý význam jakožto nejjednodušší vzor. Těmito úvahami jsme dospěli k tomu, že jsme v pozdější fázi činnosti našeho semináře, asi od roku 1952, zaměřili pozornost především k dif. lineárním rovnicím 2. řádu a pak k lineárním rovnicím vyšších řádů s konečným cílem definitivně vybudovat jejich theorii.

...

Naši vlastní výzkumnou práci o dif. lineárních rovnicích jsme ve zmíněném semináři zahájili tím, že jsem přednesl referát o svém obsáhlém pojednání týkajícím se t.zv. dispersí dif. lineárních rovnic 2. řádu a položil jsem řadu problémů vztahujících se k pojmům, jež jsem v této theorii zavedl. Theorie dispersí popisuje vlastnosti nulových bodů neboli kořenů integrálů a jejich derivací dif. lineárních rovnic 2. řádu

$$y'' = Q(t)y. \tag{a}$$

Tato problematika byla už od dob Sturmových velmi často studovaná. Známé výsledky v tomto směru mne však neuspokojovaly proto, že nevyrůstaly ze širokých metodických principů a proto byly většinou víc nebo méně isolované.

Základním předpokladem theorie dispersí je to, že funkce Q je v intervalu $(-\infty, \infty)$ stále záporná a že integrály dif. rovnice (a) oscilují. Poznal jsem, že v této situaci lze definovat spočetné systémy jistých funkcí $\varphi_n(t)$, $\psi_n(t)$, $\chi_n(t)$, $\omega_n(t)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), které nazývám centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu. „Disperse“ proto, že popisují rozložení neboli rozptyl kořenů integrálů a jejich derivací dif. rovnice (a); přívlastek „centrální“ má hlubší význam. Hlavní úspěch theorie dispersí je dán tím, že zmíněné funkce jsou přístupné široké a hluboké analyse a jejich vlastnosti se dají vyjádřit elegantními vzorci. Zmíním se zde stručně jenom o centrálních dispersích 1. druhu. Budiž t libovolné číslo a $z(t)$ nenulový integrál dif. rovnice (a), mající v čísle t kořen, takže $z(t) = 0$. Označme $\varphi_n(t)$ po př. $\varphi_{-n}(t)$ n-tý kořen funkce z, který následuje po bodu t po př. předchází bodu t; $n = 1, 2, 3, \dots; \varphi_0(t) = t$. Takový kořen vždycky existuje vzhledem k předpokladu, že integrály dif. rovnice (a) oscilují. Funkce $\varphi_n(t)$ se nazývá n-tá centrální disperse 1. druhu.

...

Ukazuje se, že centrální disperse $\varphi_n(t)$ splňují dif. nelineární rovnici 3. řádu

$$-\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} + \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2} + Q(X)X'^2 = Q(t). \tag{$\bar{b}$}$$

A právě podrobná analysa této dif. rovnice, zejména theorém o existenci a jednoznačnosti jejích řešení, úvahy o algebraické struktuře systémů těchto řešení a s tím souvisící otázky, které se týkají geometrické konstrukce zmíněných řešení tvoří hlavní náplň oné části theorie dispersí, která se vztahuje na disperse 1. druhu.

Vložme nyní citaci části přednášky *Nové výsledky v teorii diferenciálních rovnic* [B2] z roku 1954, kde O. Borůvka sám hodnotí přínos teorie dispersí.

Přínos je v tom, že se objevuje úzká souvislost mezi d. lineárními rovnicemi 2. řádu a theorií spojitých grup; dále v tom, že se popisují nové vlastnosti integrálů těchto d. rovnic, které se dají vyjádřit jednoduchými a elegantními vzorci; a konečně v tom, že se v této souvislosti ukazují nové problémy, které se zejména týkají d. rovnic řádů vyšších, a současně se naznačují cesty vedoucí k jejich řešení. Pokud jde o aplikace, theorie dispersí již umožnila podstatné zjednodušení klasických úvah o Sturmových d. systémech, vedla k objevu nových vlastností integrálů d. lineárních rovnic 4. řádu a k novým výsledkům v mechanice, a ukazuje další možnosti v některých theoriích, které souvisí s klasickou Floquetovou theorií, d. rovnicí Hillovou, Mathieuovými funkcemi aj.

Vraťme se nyní zpět k citaci z přednášky [B6] z roku 1959:

Těmito úvahami jsem byl veden ke studiu transformací řešení dvou dif. lineárních rovnic 2. řádu:

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad\qquad Y'' = Q(T)Y. \qquad (A)$$

Východiskem k těmto úvahám je transformační problém, který poprvé formuloval v r. 1834 proslulý německý matematik E. E. Kummer: Mají se najít ke každému řešení Y dif. rovnice (A) dvě funkce $w(t)$, $X(t)$ tak, aby funkce y, vyjádřená vzorcem

$$y(t) = w(t)Y[X(t)]$$

byla řešením dif. rovnice (a).

Vidíme, že v tomto problému jde o vzájemnou transformaci integrálů y, Y rovnic (a), (A), čili, stručně řešeno, o transformaci dif. rovnic (a), (A). Již Kummer ukázal, že tento transformační problém vede k dif. nelineární rovnici 3. řádu

$$-\frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} + \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad (b)$$

která, jak vidíme, přechází v dif. rovnici $(\bar{b})$, když $q(t) = Q(t)$, t.j. když obě dif. rovnice (a), (A) splynou v jedinou a problém se redukuje na vzájemnou transformaci integrálů téže dif. rovnice (a).

Zkušenosti, které jsem získal v theorii dispersí umožnily podrobnou analysu dif. rovnice (b), kterážto dif. rovnice má pro theorii transformací dif. lineárních rovnic 2. řádu podobný význam jako dif. rovnice $(\bar{b})$ v theorii dispersí.

O významu transformační teorie a výsledcích, které byly nalezeny v souvislosti s teorií dispersí a transformací, citujme ze zprávy o ukončení resortního úkolu Ma-6:

Je přirozené, že teorie dif. lineárních rovnic 2. řádu je pro tyto dif. rovnice důležitá, neboť v konkrétních případech umožňuje převést studium vlastností integrálů dané a často složité dif. lineární rovnice 2. řádu na dif. rovnice jako jsou $y'' = 0$ nebo $y'' = -y$. Nemohu zde ovšem zacházet do podrobností, avšak dovolím si alespoň heslovitě uvést některé výsledky, které jsme v souvislosti s výše uvedenými theoriemi nalezli ve spolupráci s jednotlivými členy našeho semináře, zejména též mimobrněnskými: Nový způsob řešení okrajového problému 2. řádu, řešení některých okrajových problémů vyšších řádů, rozšíření Floquetovy teorie na dif. rovnice s neperiodickými koeficienty, *nové výsledky o Abelově funkční rovnici* $F[\varphi(t)] - F(t) = 1$, *nové vlastnosti integrálů dif. lineárních rovnic 3., 4. a 5. řádů, zejména úplná teorie rovnic 3. řádu, kanonické tvary rovnic vyšších řádů, rozšíření teorie dispersí a teorie transformací na systémy dvou dif. lineárních rovnic 1. řádu, aj. Zejména se obě teorie ukázaly účinnými při řešení otázek, v nichž jsou předepsány jisté vlastnosti integrálů a hledají se všechny dif. lineární rovnice 2. řádu, jejichž integrály je mají. V tomto směru byly např. určeny všechny dif. lineární rovnice 2. řádu s ekvidistantními kořeny integrálů, rovnice s danými centrálními dispersemi 1. druhu, rovnice se splývajícími centrálními dispersemi 3. a 4. druhu, aj.*

...

Vedle studia dif. rovnic lineárních věnoval jsem v semináři pozornost i rovnicím nelineárním. V tomto směru jsem našel velmi obecné a současně účinné kriterium pro jednoznačnost integrálů dif. rovnice $y' = f(x, y)$ *(nebo systému, značí-li* y *a* f *vektory), které zahrnuje řadu známých kritérií, jako podmínku Montelovu, Peanovu, Bompianiovu a Nagumovu a další kriteria zcela nového typu. Také tato práce byla v semináři předmětem podrobného a hlubokého studia a vedla k pozoruhodným výsledkům objasňujícím vztah zmíněného kriteria k obecnému kriteriu Kamkeovu.*

Lze říci, že rokem 1960 ukončil O. Borůvka první, nejzávažnější etapu výzkumu a položil základy nové teorii dispersí a transformací. V pozdějších letech tuto teorii neustále rozšiřoval a prohluboval, obohacoval o algebraické a geometrické pohledy, nacházel nové aplikace a přenášel ji na rovnice vyšších řádů. Vytvořil přitom obrovskou základnu, na níž stavěli a nové výsledky nacházeli jeho mladší kolegové a spolupracovníci z celé republiky. O tom, že si O. Borůvka byl tohoto přínosu pro mladou matematickou generaci plně vědom, svědčí následující citace ze zprávy o ukončení resortního úkolu Ma-6:

Velký úspěch vyplynuvší z plnění zmíněného úkolu vidím v tom, že řada mladších pracovníků byla uvedena do vážné vědecké práce a získala pevný a široký základ pro další vlastní vědecké výzkumy. Práce v semináři vedly u řady jeho členů k dosažení hodnosti kandidáta věd fyzikálně-matematických[9] *a v některých případech k habilitaci, právě na základě výsledků z okruhu problémů probíraných v semináři (docenti: M. Švec, M. Greguš, Z. Hustý, M. Laitoch; odb. asistenti: V. Šeda, M. Ráb, E. Barvínek, J. Chrastina, S. Šantavá-Krohová). Někteří z těchto pracovníků zakládají již vlastní vědecké kroužky, v nichž dále rozvíjejí docílené výsledky.*

O. Borůvka sám na základě dosažených výsledků slavil mnohé úspěchy a dostalo se mu mnohých významných ocenění a poct. Z těch nejvýznamnějších jmenujme Eulerovu medaili Německé akademie věd v Berlíně roku 1957, Státní cenu Klementa Gottwalda roku 1959 a Eulerovu medaili AV SSSR roku 1960.

O výsledcích docílených v rámci plnění uvedeného úkolu Ma-6 přednášel na řadě matematických sjezdů u nás (1955) a v cizině (Varšava 1953, Bukurešť 1956, Vídeň 1956, Berlín 1959, Budapešť 1960) a mimo to v roce 1955 konal přednášky na univerzitách v Krakově, Vratislavi a Varšavě. Více o tom pojednává 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*.

[9]Soupis všech disertačních prací k dosažení doktorátu, disertačních prací kandidátů věd a doktorů věd, jež se týkaly diferenciálních rovnic a byly obhájeny na brněnské univerzitě od jejího založení do roku 1967 je uveden v *Příloze 3.*

Ukončeme toto shrnutí vývoje transformační teorie do roku 1960 citací z dopisu M. Greguše O. Borůvkovi ze 17. listopadu 1958:

Váž. pán profesor,

v prílohe Vám posielam stručný popis Vašich disperzií a transformácií v aplikáciach na naše výsledky, presnějšie v našich výsledkoch. Viete vec sa má tak, že Vaše práce boli nielen výdatnou a podstatnou pomôckou pri dôkazoch určitých viet, hlavne okrajových úloh, ale čo je najdôležitejšie inšpirovali celý kolektiv ako brnenských tak aj bratislavských matematikov k hlbšiemu štúdiu problematiky lineárnych rovníc a boli výstižným príkladom štúdia problematiky, ktorá sa naoko nezdala problematikou, alebo sa problémy nevideli. Možno som to poriadne nevystihol čo chcem povedať, avšak pri štúdiu lineárnych dif. rovníc sa vždy bude vychádzať z Vašich výsledkov hlavne u rovníc vyšších rádov, kde sa nutne prichádza k zväzkom riešení a ku skúmaniu ich vlastností.

6 Seminář v letech 1961 – 1966

Státní plán vědeckovýzkumných prací na léta 1961 – 1965, jenž byl součástí státního plánu rozvoje národního hospodářství na totéž období, obsahoval 16 komplexních úkolů. Komplexní úkoly se dělily na stěžejní výzkumné úkoly a každý stěžejní úkol byl členěn na hlavní problémy. Práce na hlavním problému se zúčastňovalo zpravidla více vědeckovýzkumných pracovišť. Každé z těchto pracovišť řešilo dílčí problém.

Výzkum O. Borůvky spadal pod komplexní úkol *I. Výzkum matematických metod a fysikálních zákonitostí k získání podkladů pro nové řešení problémů přírodních a technických věd*, pod stěžejní úkol *I-1 Matematické metody přírodních a technických věd* a hlavní problém *I-1-1 Matematická analýza.*[10] Dílčí problém, jenž byl plněn O. Borůvkou, nesl název *Teorie diferenciálních rovnic obyčejných. (Studium speciálních vlastností obyčejných diferenciálních rovnic hlavně lineárních 2. řádu se zřetelem k aplikacím.)* S řešením bylo započato 1. ledna 1961 a hlavním cílem bylo sepsání moderní a původní učebnice z oboru obyčejných diferenciálních rovnic.

V následujících odstavcích si všimneme činnosti semináře v jednotlivých letech 1961 – 1966. Nebudeme již činnost semináře rozdělovat na I. a II. pololetí, ani uvádět publikační činnost členů semináře. Vzhledem k nedostatku archivních zdrojů se zaměříme pouze na obsahovou náplň semináře a zmíníme se o zahraničních cestách a přednáškách O. Borůvky.

6.1 Činnost semináře v roce 1961

Bylo vykonáno 5 schůzí semináře 20. 6.), jichž se průměrně zúčastňovalo 20 členů.

Ve dvou seminářích přednášeli o svých výsledcích M. Greguš (o některých vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y''' + 2Ay' + (A + b)y = 0$ $(b \geq 0)$) a M. Zlámal (o odhadu chyb při okrajových problémech druhého a vyšších řádů s použitím Greenovy funkce).

V ostatních seminářích přednášel O. Borůvka. Vyložil přehledný úvod do teorie transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu za účelem uvedení nových členů semináře do této teorie

[10] Koordinátorem hlavního problému I-1-1 byl J. Kurzweil z MÚ ČSAV.

a předvedl aplikaci teorie transformací na určení všech lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, které mají předepsaný konečný typ s konjugovanými body.

Poznámky:

1. V květnu 1961 vykonal O. Borůvka zahraniční cestu do Paříže, kde proslovil v ústavu Institut Henri Poincaré přednášky na téma *Transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*, *Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoides* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

2. V roce 1961 vyšly Borůvkovy skripta *Diferenciálne rovnice* (Slovenské pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1961, 205 str.). Jedná se o původní vysokoškolský učební text obsahující řadu nových výsledků.

6.2 Činnost semináře v roce 1962

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 15 členů.

Ve čtyřech seminářích přednášeli o svých výsledcích M. Laitoch (o aplikacích teorie transformací lineárních rovnic 2. řádu na řešení okrajových problémů), M. Švec (o oscilatorickém charakteru nehomogenních lineárních rovnic 2. řádu a aplikaci příslušných metod na homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu) a F. Neuman.

O. Borůvka měl čtyři přednášky o vlastnostech množin lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu majících společnou základní centrální dispersi 1. druhu.

Docílené výsledky prohlubují a značně rozšiřují dosavadní znalosti v oboru dif. lin. rovnic 2. řádu. V oboru teorie množin dif. lin. rovnic 2. řádu se společnou základní centrální dispersí 1. druhu je hlavním výsledkem zjištění účinnosti obecných algebraických metod z teorie grup a věta, že mohutnost každé takové množiny je vždycky táž, tj. nezávisí na volbě základní centrální disperse 1. druhu, a rovná se mohutnosti kontinua.

Poznámka:

V září 1962 se O. Borůvka zúčastnil první československé konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích s názvem Equadiff, jež se konala v Praze. Proslovil zde přednášku na téma *Transformace diferenciálních lineárních rovnic obyčejných druhého řádu*.

V říjnu a listopadu 1962 proslovil na univerzitách v Greifswaldu, Rostocku a Halle přednášky s názvy *Transformationen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung* a *Zerlegungen in Mengen und algebraische Strukturen* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

6.3 Činnost semináře v roce 1963

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 16 členů.

V pěti seminářích přednášel o svých výsledcích Z. Hustý (o iterovaných lineárních diferenciálních rovnicích; asymptotické vzorce pro integrály homogenních lineárních rovnic n-tého řádu), ve dvou V. Šeda (o transformacích lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu) a na jedné schůzi proslovil O. Borůvka přednášku o fázovém vyjádření diferenciální rovnice $Y'' = q(t)Y$.

Výsledky, kterých bylo v r. 1963 docíleno, jsou hluboké a týkají se širokých úseků teorie dif. lineárních rovnic vyšších řádů a proto je nelze v podrobnostech v této zprávě uvádět. Jde hlavně o vlastnosti dif. lineárních (homogenních) rovnic n-tého řádu, které vzniknou $(n-1)$-násobnou iterací dif. rovnic 1. řádu (Z. Hustý), o asymptotické vyjádření integrálů dif. lineární rovnice n-tého řádu (Z. Hustý). Další výsledky přinášejí rozsáhlou teorii transformací dif. lineárních rovnic n-tého řádu; zejména lze pomocí výsledků teorie transformací dif. lineárních rovnic 2. řádu a klasických výsledků o lineárních invariantech odvodit nutnou a dostatečnou podmínku pro ekvivalenci dvou dif. lineárních rovnic n-tého řádu v polokanonickém tvaru (V. Šeda). Rovněž široce založené jsou úvahy týkající se fázového vyjádření dif. rovnice $y'' = q(t)y$, které souvisí s problémy splynutí první a druhé, popř. třetí a čtvrté centrální disperse (O. Borůvka). Ve všech těchto případech jde o výsledky globální povahy v reálném oboru.

Poznámka:

V roce 1963 se O. Borůvka zúčastnil konference o aproximacích funkcí s numerickými aplikacemi konané v Kluži, v jejímž rámci proslovil plenární přednášku na téma *Über einige Fragen aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Během konference byl pozván k přednáškám na univerzitách v Bukurešti a v Iassi, kde přednášel na téma *Apercu de la théorie des transformations des equations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

6.4 Činnost semináře v roce 1964

Bylo vykonáno 8 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 22 členů.

V prvních čtyřech schůzích přednášel Z. Hustý o svých výsledcích o transformaci a ekvivalenci homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů a o diferenciálních invariantech. V ostatních schůzích přednášel O. Borůvka o teorii fází lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

V této teorii jsem systematicky zpracoval řadu nových výsledků v širší souvislý úsek teorie dif. lineárních rovnic 2. řádu.

Popišme stručně obsahy jednotlivých Borůvkových přednášek:

V první přednášce byly podány základní pojmy této teorie, zejména pojmy první a druhé fáze rovnice

$$y'' = q(t)y. \qquad (q)$$

Byly odvozeny jejich základní vlastnosti, zvláště vzorce pro jejich derivace a vztahy k funkci q v souvislosti se schwarzovskou derivací.

Ve druhé přednášce byly odvozeny vzorce pro obecný integrál y a jeho derivaci y' v závislosti na první a druhé fázi α, β rovnice (q)

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad y' = \pm k_1 \sqrt{|q|}\, \frac{\sin(\beta + k_2)}{\sqrt{|\beta'|}}$$

$(k_1,\, k_2 = \text{konst.})$ a byly studovány vztahy mezi prvními a druhými fázemi patřícími k téže bázi. Základní vztah v tomto směru je dán vzorcem

$$\beta = \alpha + \text{Arccotg}\, \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})'.$$

V další přednášce byly stručně uvedeny pojmy centrálních dispersí jednotlivých druhů φ_n, ψ_n, χ_n, ω_n oscilatorické rovnice (q) a byly odvozeny příslušné abelovské relace. Zejména pro základní centrální disperse φ_1, ψ_1, χ_1, ω_1 lze tyto relace psát ve tvaru

$$\alpha(\varphi_1) = \alpha + \varepsilon\pi, \quad \beta(\psi_1) = \beta + \varepsilon\pi, \quad \beta(\chi_1) = \alpha + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \quad \alpha(\omega_1) = \beta - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi,$$

přičemž je $\varepsilon = \pm 1$. Na tomto základě byly odvozeny nelineární diferenciální rovnice 3. řádu pro centrální disperse jednotlivých druhů.

Poslední přednáška byla věnována studiu tzv. polárních funkcí rovnice (q). Polární funkcí rovnice (q) se rozumí funkce $\theta = \beta - \alpha$, kde α, β jsou libovolná první a druhá fáze patřící k téže bázi rovnice (q). Byly odvozeny charakteristické vlastnosti polárních funkcí. Ke každé funkci θ s těmito vlastnostmi existuje jednoparametrický systém rovnic (q), pro něž je θ polární funkcí.

Poznámka:

V roce 1964 proslovil O. Borůvka na osobní pozvání na Vysoké škole technické ve Stuttgartu a na univerzitách v Giessenu a Tübingenu v NSR následující přednášky o svých vědeckých výsledcích: *Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*, *Algebraische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Kromě toho se v témže roce zúčastnil jubilejních slavností v Krakově, jež se konaly při příležitosti 600. výročí založení Jagellonské univerzity.

6.5 Činnost semináře v roce 1965

Bylo vykonáno 11 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 24 členů.

V prvních osmi seminářích přednášel O. Borůvka o svých výsledcích z teorie fází lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. V dalších třech přednášeli o svých výsledcích M. Ráb a M. Švec.

Ve svých přednáškách z teorie fází se O. Borůvka věnoval následujícím tématům: Radonův parametr báze, Radonův polární tvar nosiče q, normované polární funkce 1., 2. a 3. druhu a jejich vlastnosti a aplikace na řadu úloh, například určení všech rovnic (q) s ekvidistantním rozložením kořenů jejich integrálů nebo určení všech rovnic (q) se splývajícími centrálními dispersemi 1. a 2. druhu.

Výsledky získané při plnění tohoto úkolu v roce 1965 přinášejí podstatné rozšíření a prohloubení poznatků o dif. lineárních rovnicích 2. řádu a v širokých souvislostech objasňují význam teorie dispersí a její vztahy k teorii transformací těchto dif. rovnic.

Poznámka:

V roce 1965 se O. Borůvka zúčastnil matematické konference, která se konala v Berlíně k uctění 150. výročí narození K. Weierstrasse. Proslovil zde přednášku na téma *Neuere Ergebnisse der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Kromě toho přednášel o svých výsledcích na letní škole o diferenciálních rovnicích v Jeseníkách, kterou uspořádala JČMF.

6.6 Činnost semináře v roce 1966

Bylo vykonáno 9 schůzí semináře, jichž se průměrně zúčastňovalo 26 členů semináře.

Ve dvou seminářích přednášel M. Švec o použití věty o pevném bodě při asymptotickém vyšetřování řešení diferenciálních rovnic, ve třech schůzích F. Neuman o nových výsledcích z teorie lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s periodickými koeficienty.

V dalších čtyřech schůzích přednášel O. Borůvka na téma *Teorie obecných dispersí diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.* Uveďme stručně obsah těchto přednášek:

V první přednášce byl podán stručný přehled teorie obecných dispersí s uvedením zamýšlených cílů přednášek. Byly probrány základní poznatky o lineárních diferenciálních rovnicích 2. řádu se zřetelem k teorii transformací těchto rovnic. Byl zaveden pojem lineárního zobrazení integrálních prostorů dvou rovnic

$$(q) \qquad y'' = q(t)y, \qquad Y'' = Q(T)Y. \qquad (Q)$$

Druhá přednáška byla věnována studiu vlastností lineárních zobrazení p integrálních prostorů r, R rovnic (q) a (Q). Zejména byl zaveden pojem fázové báze $(\alpha, \mathcal{A})$ lineárního zobrazení p a bylo ukázáno, že pro každé dva integrály $y \in r$, $Y = py \in R$ platí vzorce tvaru

$$y = k_1 \frac{\sin(\alpha + k_2)}{\sqrt{|\alpha'|}}, \qquad Y = ck_1 \frac{\sin(\mathcal{A} + k_2)}{\sqrt{|\mathcal{A}'|}}$$

s vhodnými, popř. libovolnými konstantami c, $k_1 (\neq 0)$, k_2.

V další přednášce bylo pokračováno ve studiu vlastností lineárních zobrazení p integrálních prostorů rovnic (q), (Q). Hlavní pozornost byla věnována pojmu tzv. normovaných lineárních zobrazení a jejich kanonickým fázovým bázím. Dále byl konstruktivně zaveden pojem obecné disperse $X(t)$ oscilatorických rovnic (q), (Q). Obecná disperse $X(t)$ je funkce definovaná v definičním intervalu rovnice (q), její hodnoty pokrývají definiční interval rovnice (Q), a je jednoznačně určena libovolnou počáteční hodnotou $T_0 = X(t_0)$ a libovolným lineárním zobrazením p normovaným vzhledem k číslům t_0, T_0.

Poslední přednáška byla věnována studiu vlastností obecných dispersí $X(t)$ rovnic (q), (Q). Bylo odvozeno vyjádření obecných dispersí ve tvaru $X(t) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha(t))$ pomocí kanonické fázové báze $(\alpha, \mathcal{A})$, lineárního zobrazení p a bylo ukázáno, že obecné disperse $X(t)$ jsou právě úplnými řešeními Kummerovy diferenciální rovnice

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t). \qquad (Qq)$$

Poznámka:

V roce 1966 se O. Borůvka zúčastnil mezinárodního kongresu matematiků v Moskvě, matematické konference v Karl-Marx-Stadtu a mezinárodní konference Equadiff II v Bratislavě. V Moskvě přednesl sdělení na téma *Die Phasengruppe und ihre Beziehungen zu Differentialtransformationen 2. Ordnung*, v Karl-Marx-Stadtu na téma *Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* a na konferenci Equadiff II proslovil přednášku s názvem *Algebraische Elemente in der Transformations theorie der oszillatorischen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (viz 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

Dnem 31. 12. 1966 ukončil O. Borůvka etapu výzkumu z let 1961 – 1966 a podal návrh na zahájení oponentského řízení. Další etapu výzkumu s týmž názvem dílčího úkolu zahájil 1. 1. 1967.

Ukončení etapy v letošním roce 1966 je odůvodněno tím, že výsledky, které jsem v ní získal, tvoří s výsledky předcházející etapy ucelenou teorii transformací obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu v reálném oboru. Takovou teorii jsem v posledních letech (mimo svůj výzkumný úkol) skutečně vypracoval. V r. 1966 jsem ukončil její přípravu do tisku jako monografii s názvem „Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung". Tato monografie má v r. 1967 vyjít v Berlíně (NDR).

Ukončením uvedené etapy výzkumu není ovšem o transformacích dif. lineárních rovnic 2. řádu řečeno poslední slovo. Naopak, jako každá matematická teorie, která je vybudována na širokém základě, připouští i teorie transformací další rozvoj. Široké možnosti rozvoje vidím zejména ve využití získaných výsledků k vypracování účinných numerických metod v oboru dif. lineárních rovnic 2. řádu a v prohloubení znalostí o struktuře grupy fází se zaměřením k abstraktní axiomatisaci teorie transformací. Z těchto důvodů hodlám ve výzkumu uvedeného úkolu pokračovat v letech 1967 – 1969 a to metodami, kterých jsem použil a které se osvědčily v minulých letech. Předpokládám, že též etapu 1967 – 1969 ukončím oponentským řízením.

7 Zahraniční cesty a mezinárodní konference

Tato kapitola přináší úplnou informaci o zahraničních cestách O. Borůvky, jež se týkaly problematiky diferenciálních rovnic do roku 1966.

Nejprve uveďme seznam všech studijních cest, zahraničních cest a mezinárodních konferencí, jichž se O. Borůvka za svého života zúčastnil. Zvýrazněny jsou ty akce, na nichž O. Borůvka proslovil přednášku týkající se diferenciálních rovnic.

1926 – 1927 studijní pobyt v Paříži u prof. E. Cartana
1929 – 1930 studijní pobyt v Paříži u prof. E. Cartana
1930 – 1931 studijní pobyt v Hamburku u prof. W. Blaschkeho
1948 přednáškový pobyt – Brusel, Liège
1953 sjezd polských matematiků – Varšava
1955 přednáškový pobyt – Vratislav, Krakov, Varšava
1956 přednáškový pobyt – Iassi
1956 sjezd rumunských matematiků – Bukurešť
1956 sjezd rakouských matematiků – Vídeň
1957 oslavy 250. výročí narození L. Eulera – Berlín
1957 konference Spolku německých matematiků – Drážďany
1959 oslavy J. P. G. Lejeune-Dirichleta – Berlín
1960 II. Maďarský matematický sjezd – Budapešť
1960 oslavy 150. výročí založení Humboldtovy univerzity a 250. výročí založení Charité – Berlín
1961 přednáškový pobyt – Paříž
1962 mezinárodní konference Equadiff – Praha
1962 přednáškový pobyt – Greifswald, Rostock, Halle
1963 matematická konference – Kluž, přednáškový pobyt – Bukurešť, Iassi
1964 oslavy 600. výročí založení Jagellonské univerzity v Krakově
1964 přednáškový pobyt – Stuttgart, Giessen, Tübingen
1965 oslavy K. Weierstrasse – Berlín
1966 mezinárodní kongres matematiků – Moskva
1966 matematická konference na VŠT – Karl-Marx-Stadt
1966 mezinárodní konference Equadiff II – Bratislava
1967 přednáškový pobyt – Řím, Florencie
1967 vědecká konference – Bologna
1967 vědecká konference – Kluž
1968 přednáškový pobyt – Londýn, Cambridge, Coventry, Paříž
1969 matematický sjezd – Bukurešť, Brašov
1972 mezinárodní konference Equadiff III – Brno
1973 matematická konference na VŠT – Karl-Marx-Stadt
1974 vědecká konference – Dundee
1977 mezinárodní konference Equadiff IV – Praha
1981 mezinárodní konference Equadiff V – Bratislava

Dále se budeme věnovat pouze těm cestám a konferencím do roku 1966, na nichž O. Borůvka proslovil sdělení z oblasti diferenciálních rovnic. Všechny podklady k této kapitole jsou čerpány z osobních záznamů O. Borůvky (archiv O. Borůvky) a ze zpráv o těchto cestách opublikovaných v časopisech.

1953 sjezd polských matematiků – Varšava

Jednalo se o VIII. sjezd polských matematiků ve Varšavě. O. Borůvka zde proslovil přednášku s názvem *Propriétés nouvelles des intégrales des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre*.

1955 přednáškový pobyt – Vratislav, Krakov, Varšava

Jednalo se o přednáškovou činnost ve zmíněných městech v době od 23. 5. do 13. 6. 1955.

Ve Vratislavi O. Borůvka pobyl od 26. 5. do 30. 5. a proslovil následující přednášky:

26. 5. *Theorie dispersí* (v semináři prof. Hartmana)
27. 5. *Přehled o theorii dispersí, Aplikace theorie rozkladů množin v oboru vědeckých klasifikací* (na schůzi PTM[11])
30. 5. *Množinové základy theorie grup* (v semináři prof. Marczewského)

V Krakově pobyl od 31. 5. do 8. 6. V té době vykonal tyto přednášky:

1. 6. *Theorie dispersí* (na schůzi PTM)
2. 6. *Množinové základy theorie grup* (v semináři prof. F. Leja)
3. 6. *Obecné kritérium jednoznačnosti řešení pro diferenciální rovnici* $y' = f(x, y)$ (v semináři prof. Szarského)
7. 6. *Transformace integrálů diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu* (na schůzi PTM)

Pobyt ve Varšavě trval od 9. 6. do 13. 6. a proslovil zde přednášku:

10. 6. *Přehled o theorii transformací integrálů diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu a o theorii dispersí* (na schůzi PTM)

Poznamenejme, že O. Borůvka v Polsku přednášel česky a že účast na jeho přednáškách, které trvaly průměrně dvě a půl hodiny, byla 15 až 50 matematiků.

1956 sjezd rumunských matematiků – Bukurešť

4. sjezd rumunských matematiků se konal v Bukurešti ve dnech 27. 5. – 4. 6. 1956. Československá delegace byla vyslána ČSAV a skládala se z těchto členů: O. Borůvka, Š. Schwarz (Bratislava), F. Nožička (Praha) a A. Švec (Praha).

[11] Polske Tovaryszstwo Matematyczne (PTM) je organizace podobná naší JČMF.

Sjezdové práce byly rozděleny do pěti sekcí (Algebra a teorie čísel, Analýza, Geometrie a topologie, Aplikovaná matematika, Metodologie a historie matematiky) a přednášky probíhaly v plenárních schůzích, ve schůzích společných několika sekcím a ve schůzích jednotlivých sekcí.

O. Borůvka měl 28. 5. přednášku v plenární schůzi s názvem *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du* 2^{nd} *ordre*. V této přednášce podal přehled výsledků analytické části teorie transformací, kterou v témže roce publikoval v práci [3] a dále zde uvedl přehled nových výsledků, týkajících se konstruktivní části teorie. Mimo to uvedl jako aplikaci těchto výsledků určení všech funkcí Q v diferenciální rovnici $y'' = Q(t)y$, které se vyznačují tím, že všechna řešení této rovnice jsou oscilatorická.

Bývá zvykem, že se v rámci matematických, ale i jiných vědeckých sjezdů, konají zájezdy na zajímavá místa příslušné země. Členové československé delegace se zúčastnili zájezdu k Černému moři a výletu na parníku k deltě Dunaje. Jako zajímavost citujme z přednášky *O matematických sjezdech v Bukurešti a ve Vídni*, kterou O. Borůvka proslovil v pobočce JČMF v Brně 6. 12. 1956:

Při své cestě na parníku po dunajských ramenech a pak na menších motorových lodicích na dunajských kanálech viděli jsme hejna pelikánů, divokých kačen, volavky a jiné pernaté obyvatele těchto končin v množstvích, jimž bychom přisoudili kardinální čísla značné velikosti. Dunaj měl značně vysoký vodní stav, takže na některých místech byla krajina daleko široko zaplavena a jenom rákosí v nepřehledných lánech a nečetné stromy ukazovaly, kde je pevná země.

1956 sjezd rakouských matematiků – Vídeň

4. sjezd rakouských matematiků se konal ve Vídni ve dnech 17. 9. – 22. 9. 1956. Tento sjezd obeslala jednak ČSAV svým delegátem Š. Schwarzem z Bratislavy, jednak Ministerstvo školství a kultury delegáty z přírodovědecké fakulty v Brně, M. Novotným a O. Borůvkou. Mimo to se sjezdu zúčastnil R. Piska z Vojenské technické akademie v Brně a neoficiálně O. Vejvoda, V. Pták a M. Fiedler z Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Sjezdová jednání byla rozdělena do pěti sekcí (Algebra a teorie čísel, Analýza, Geometrie a topologie, Aplikovaná matematika, Historie a filozofie) a přednášky se konaly pouze ve schůzích sekcí.

O. Borůvka měl 22. 9. sdělení na téma *Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, kde vyložil výsledky své nové práce se stejným názvem.

Pro zajímavost a dokreslení tehdejší situace citujme ze zprávy O. Borůvky o tomto sjezdu:

Pokud se týče s. doc. Novotného a mne, byla naše radost z účasti na tomto sjezdu značně zkalena tím, že naše pasové věci byly vyřízeny opožděně, takže jsme do Vídně přijeli až 19. září večer, a tím jsme přišli o tři sjezdové dny. Za naši účast na tomto sjezdu vděčíme zejména obětavé snaze s. doc. Novotného, který odejel do Prahy, když se na vyřízení našich pasových věcí pozapomnělo, a tam všechny potřebné formality uspíšil s časovým epsilonem rovným třem dnům.

O tom, že ani tato nepříliš veselá příhoda neubrala O. Borůvkovi a M. Novotnému na humoru svědčí také následující poznámka z téže zprávy:

Ve dnech 23. 9. – 25. 9. se konala pro účastníky sjezdu okružní cesta po Rakousku, která vyvrcholila jízdou po proslulé automobilové dráze vedoucí z obce Heiligenblut pod Glossglockner do výše 2400 m. Chtěl bych prozradit, že při této jízdě překypoval můj milý společník doc. Novotný znamenitým humorem, když při různých příležitostech na této cestě konstatoval, že zřícení autobusu do propasti s výše pouhých 50 m by bylo nepatrnou dopravní nehodou, s výše 500 m by bylo pěkným neštěstím a s výše 1000 m pořádnou katastrofou.

1959 oslavy J. P. G. Lejeune-Dirichleta – Berlín

Německá akademie věd v Berlíně uspořádala ve dnech 22. 6. – 24. 6. 1959 oslavy německého matematika Jeana Petra Gustava Lejeune-Dirichleta. V rámci těchto oslav byla na Humboldtově univerzitě odhalena Dirichletova busta a konala se menší matematická konference s mezinárodní účastí. Slavností se zúčastnilo 6 zahraničních matematiků, z nichž jedním byl O. Borůvka. Celkem bylo prosloveno 9 přednášek.

O. Borůvka proslovil 23. 6. přenášku na téma *Über einige Ergebnisse der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Sám O. Borůvka hodnotil tuto přednášku jako velmi úspěšnou, neboť se po přednášce na něho obrátil W. Zwick z Německé akademie věd s dotazem o možnosti spolupráce.

1960 II. Maďarský matematický sjezd – Budapešť

II. Maďarský matematický sjezd se konal v Budapešti ve dnech 24. 8. – 31. 8. 1960. Z Československa se sjezdu zúčastnili O. Borůvka, J. Novák, V. Jarník, V. Kořínek a několik mladších matematiků.

Vědecký program sjezdu probíhal v sedmi sekcích. O. Borůvka proslovil v sekci aplikace matematiky přednášku s názvem *Neuere Ergebnisse auf dem Gebiet der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*, jejíž výtah vyšel ve sjezdovém sborníku. Mimo to vedl 25. 8. odpoledne v této sekci sjezdové jednání jako předseda.

1961 přednáškový pobyt – Paříž

V listopadu 1960 obdržel O. Borůvka od děkana přírodovědecké fakulty univerzity v Paříži J. Pérèse pozvání, aby ve školním roce 1960/61 proslovil dvě přednášky z matematiky v ústavu Institut Henri Poincaré. Tomuto pozvání O. Borůvka vyhověl ve dnech 27. 4. – 16. 5. 1961.

První část svého pobytu v Paříži věnoval O. Borůvka důkladné přípravě svých přednášek a jejich úpravě k tisku. První přednášku s názvem *Transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre* proslovil 3. 5. a druhou *Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoides* 8. 5.

Uveďme citaci ze zprávy o této cestě, kde se O. Borůvka zamýšlí nad výběrem témat svých přednášek a nad zaměřením pařížské matematiky:

Jestliže jsem o vhodnosti přednášky o rozkladech množin a teorii grupoidů neměl ani na okamžik pochybnosti z důvodů, o nichž ještě budu hovořit, byla situace jiná pokud jde o zmíněnou *přednášku z oboru diferenciálních rovnic. Ne snad proto, že jsem si nebyl jist vědeckou hodnotou, dosahem a bohatostí výsledků, o nichž jsem chtěl hovořit, ale proto, že jsem mohl pochybovat o porozumění pařížských matematiků právě v tomto směru. Je všeobecně známo, že v současné tvorbě a zájmu těchto matematiků převládá vliv kolektivu N. Bourbaki, který se uplatňuje ústředním postavením moderní algebry a topologie. Dobře jsou v Paříži též zastoupeny obory pravděpodobnosti, matematické statistiky a matematické fysiky, kdežto rozsah zájmu o analysu a geometrii (nealgebraickou) a zejména o klasické úseky těchto disciplin je podstatně menší. Tento nedostatek je kritisován i některými pařížskými matematiky, hlavně pokud jde o diferenciální geometrii, která v době Darbouxově, kolem začátku tohoto století, a později pracemi E. Cartana dosáhla v Paříži zlatého věku svého rozvoje. Za této situace a při častých přednáškách zahraničních profesorů z oborů blízkých škole bourbakistů bych nemohl být překvapen jistým nezájmem nebo neúčastí pařížských matematiků na přednášce z oboru tak odlehlého, jako je klasická teorie diferenciálních rovnic. ... Dnes mohu říci, že jsem volbou přednášky o diferenciálních rovnicích nechybil.*

Pro doplnění uveďme ještě zmínku o přednášce týkající se rozkladů množin a teorie grupoidů:

... o vhodnosti této přednášky jsem neměl ani na okamžik pochyby a vlastně za účelem této přednášky se mně dostalo pozvání do Paříže. Je všeobecně známo, že teorie rozkladů množin je v úzké souvislosti s teorií ekvivalencí, která byla založena právě pařížskými profesory P. Dubreilem a pí. M. L. Dubreil-Jacotinovou v r. 1937 a americkým profesorem O. Orem v r. 1942, a později rozvinuta. Pokud jde o teorii rozkladů v množinách, založil jsem ji v r. 1939.

Celkem lze říci, že O. Borůvka v této přednášce podal přehled hlavních výsledků ze své knihy *Grundlagen der Grupoid- und Gruppentheorie* z roku 1960.

Návštěva na obou přednáškách byla dobrá; zúčastnilo se jich pokaždé asi 30 lidí, mezi nimi někteří zahraniční profesoři a též studenti z nejvyšších ročníků proslulé školy École normale supérieure. Domnívám se, že jsem dosáhl plného úspěchu, jak soudím z několika blahopřání, která mně po přednáškách projevili profesoři Dubreil, Cartan, Mandelbrojt aj. Profesoru Lesieurovi z pařížské university, který si po druhé přednášce vyžádal krátkou konsultaci a předal mně některé své publikace, jsem věnoval výtisk své německé knihy Gruppoid- und Gruppentheorie.

1962 mezinárodní konference Equadiff – Praha

Equadiff 1962 byl první československou konferencí o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích s mezinárodní účastí, která se konala ve dnech 5. 9. – 11. 9. 1962 v Praze.

Hlavní referáty byly přednášeny na plenárních zasedáních a průběžně překládány do ruštiny a angličtiny. Poznamenejme přitom, že hlavní referáty českých matematiků byly přednášeny v českém jazyce. Ostatní sdělení byla prezentována ve třech sekcích: Obyčejné diferenciální rovnice, Parciální diferenciální rovnice, Aplikace.

Konference byla zahájena přednáškou O. Borůvky s názvem *Transformace diferenciálních lineárních rovnic obyčejných druhého řádu*. V dopoledním zasedání byl dále zařazen referát akad. S. L. Soboleva a v odpoledním zasedání referát prof. G. Sansone a dr. Babušky.

Na Equadiffu vystoupila se svými referáty také řada členů Borůvkova semináře o diferenciálních rovnicích, například M. Greguš (*Über Randwertprobleme n-ter Ordnung*), Z. Hustý (*Über einige Eigenschaften linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung*), M. Laitoch (*Die Begleitungsgleichung und ihre Bedeutung in der Theorie der Transformationen gewöhnlicher linearer*

Differentialgleichungen zweiter Ordnung), M. Ráb (*Asymptotische Formeln für die Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*), V. Šeda (*Über die Eigenschaften der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in komplexer Ebene*), M. Švec (*O lineárných diferenciálných rovniciach tretího a štvrtého rádu*), M. Zlámal (*The Parabolic Equations as a Limiting Case of Hyperbolic and Elliptic Equations*) a mnoho dalších českých a slovenských matematiků.

1962 přednáškový pobyt – Greifswald, Rostock, Halle

O. Borůvka se nejprve zúčastnil ve dnech 24. 10. – 29. 10. 1962 konference o algebře a teorii čísel v Berlíně a na to navázal svými přednáškami na univerzitách v Greifswaldu (29. 10. – 2. 11.), Rostocku (2. 11. – 5. 11.) a Halle (5. 11. – 9. 11.).

Konference o algebře a teorii čísel byla uspořádána ústavem pro čistou matematiku při Německé akademii věd v Berlíně. Z Československa byl kromě O. Borůvky pozván prof. J. Bílek z Prahy. O. Borůvka zde žádnou přednášku neproslovil, neboť v té době pracoval hlavně v oboru diferenciálních rovnic.

Na univerzitách proslovil O. Borůvka přednášku s názvem *Transformationen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (Greifswald 30. 10., Rostock 3. 11., Halle 6. 11.) a mimo to v Halle přednášku *Zerlegungen in Mengen und algebraische Strukturen* (7. 11.).

Přednášek se zúčastnilo vždy asi 50 matematiků a domnívám se, že měly naprostý úspěch. Pochvalně se o nich vyjádřili zejména prof. R. Kochendörffer a A. Schmidt (Rostoky), prof. H. Schubert a O. H. Keller (Halle) v soukromých rozhovorech a veřejně při závěru přednášek.

1963 matematická konference – Kluž, přednáškový pobyt – Bukurešť, Iassi

Matematická konference o aproximacích funkcí s aplikacemi na numerické výpočty v Kluži se konala ve dnech 15. 11. – 19. 11. 1963. Z Československa byl na konferenci pozván kromě O. Borůvky ještě prof. F. Nožička z Prahy.

O. Borůvka proslovil na této konferenci plenární přednášku na téma *Über einige Fragen aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Během konference byl O. Borůvka i F. Nožička pozván od akad. G. Moisila (Bukurešť) a prof. A. Haimovici (Iassi) k proslovení přednášek na univerzitách v Bukurešti a Iassi. Tomuto pozvání oba matematikové vyhověli a po ukončení konference odcestovali do Bukurešti (20. 11. – 24. 11.) a pak do Iassi (25. 11. – 26. 11.). V těchto městech O. Borůvka proslovil přednášku s názvem *Apercu de la théorie des transformations des équations différentielles ordinaires du deuxième ordre*.

1964 přednáškový pobyt – Stuttgart, Giessen, Tübingen

Jednalo se o zahraniční cestu ve dnech 3. 6. – 10. 6. 1964 za účelem proslovení přednášek na Vysoké škole technické ve Stuttgartu a na univerzitách v Giessenu a Tübingenu. K pozvání k této cestě došlo v listopadu 1963 na podnět G. Grimeisena, docenta matematiky při Vysoké škole technické ve Struttgartu, který byl přítomen přednášce O. Borůvky na konferenci o uspořádaných množinách, jež se konala v listopadu 1963 v Brně, a projevil značný zájem o jeho výsledky z oboru algebry a diferenciálních rovnic.

Ve Stuttgartu proslovil O. Borůvka dne 4. 6. přednášku na téma *Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Přednáška se dle jeho vlastních slov konala za přítomnosti asi 70 účastníků. Druhou přednášku vykonal dne 5. 6. na univerzitě v Giessenu na téma *Algebraische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Třetí přednášku proslovil dne 8. 6. v Tübingenu a její téma bylo podle přání tamějších matematiků stejné jako ve Stuttgartu. Druhé i třetí přednášky se zúčastnilo asi 40 matematiků.

1965 oslavy K. Weierstrasse – Berlín

Jednalo se o účast O. Borůvky na matematické konferenci, která se konala v Berlíně ve dnech 19. 10. – 23. 10. 1965 k uctění 150. výročí narození slavného německého matematika K. Weierstrasse. Kromě toho byl O. Borůvka jmenován členem čtrnáctičlenné delegace ČSAV, která byla vedena akademikem F. Šormem a měla v Berlíně jednat o spolupráci mezi ČSAV a Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (DAW).

V Berlíně se O. Borůvka zúčastnil jako člen uvedené delegace všech jejích prací a ve zbývajícím čase byl přítomen jednání matematické konference. Většina přednášek této konference, jíž se zúčastnilo asi 130 matematiků z celého světa, měla vztah k Weierstrassovu dílu. O. Borůvka proslovil dne 22. 10. přednášku s názvem *Neuere Ergebnisse der Transformationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. V této přednášce vyložil několik svých výsledků z poslední doby týkajících se lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu se stejnou základní centrální disperzí 1. druhu.

Pro zajímavost uveďme citace z korespondence, která předcházela účasti O. Borůvky na matematické konferenci v Berlíně. Dne 14. září 1965 píše O. Borůvka řediteli Matematického ústavu ČSAV prof. V. Knichalovi:

... včera jsem obdržel přípis z Tvého ústavu, obsahující opis sdělení zahraničního odboru úřadu presidia ČSAV týkající se mé účasti na Weierstrassových oslavách ...

Jsem zcela bezradný a nevím co s tím dělat. V červnu t. r. jsem obdržel osobní pozvánku k účasti na těchto oslavách a dopisem (adresovaným Deutsche Akad. der Wiss. zu Berlin) jsem se dne 5. července omluvil, že se nemíním zúčastnit.

V přípise z Tvého ústavu je opis sdělení téže DAW datovaného 4. srpna 1965, podle něhož by mne (a s. Kurzweila) na oslavách rádi viděli. Přitom by si přáli, aby výlohy hradila některá naše instituce (v mém případě ČSAV nebo MŠK). Je samozřejmé, že cestu do Berlína rád podniknu jestliže k tomu budu vyzván (a domnívám se, že by bylo vhodné přání DAW vyhovět), avšak na druhé straně se mně zdá dost nesnadné žádat z vlastní iniciativy o povolení cesty, kterou jsem původně nemínil vykonat.

Proto Tě prosím, kdybys laskavě promluvil se s. Jarníkem po př. se zahraničním odborem úřadu presidia ČSAV, jak se mám zachovat. ...

Dne 17. září 1965 dostává O. Borůvka odpověď od vědeckého tajemníka Matematického ústavu ČSAV dr. M. Jiřiny, jež zastupoval v té době nepřítomného V. Knichala.

Vyšetřením v zahraničním odboru ČSAV jsem zjistil, že máte zásadní nárok jeti do zahraničí (z titulu člena korespondenta) na útraty Akademie. Je ovšem nutné, aby Vaše pracoviště ihned zaslalo příslušný návrhový list na Vaše vyslání do NDR k účasti na oslavách 150. výročí narození

K. T. Weierstrasse a výslovně tam podotklo, že náklady pobytu uhradí Československá akademie věd z titulu člena korespondenta.

1966 mezinárodní kongres matematiků – Moskva

Mezinárodní kongres matematiků v Moskvě se konal ve dnech 16. 8. – 26. 8. 1966 a zúčastnili se ho matematikové z celého světa. Práce kongresu se konaly v 15 sekcích a týkaly se všech matematických oborů.

O. Borůvka proslovil dne 25. 8. sdělení na téma *Die Phasengruppe und ihre Beziehungen zu Differentialtransformationen 2. Ordnung*.

1966 matematická konference na VŠT – Karl-Marx-Stadt

Matematická konference „3. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik“ se konala na vysoké škole technické v Karl-Marx-Stadtu ve dnech 1. 6. – 4. 6. 1966 a zúčastnilo se jí asi 140 matematiků.

O. Borůvka, jenž byl pozván rektorem této školy, proslovil 1. 6. hlavní přednášku na téma *Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Z československých matematiků proslovili hlavní přednášku kromě O. Borůvky ještě M. Greguš z Bratislavy a K. Rektorys z Prahy. Kromě toho dalších sedm československých matematiků předneslo krátká sdělení v jednotlivých sekcích.

1966 mezinárodní konference Equadiff II – Bratislava

Druhá československá konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích Equadiff II se konala ve dnech 1. 9. – 7. 9. 1966 v Bratislavě. Tato konference byla součástí oslav 500. výročí založení vysoké školy Academie Istropolitany v Bratislavě a 25. výročí otevření Přírodovědecké fakulty Univerzity Komenského.

Vědecký program se rozděloval do třech sekcí: Obyčejné diferenciální rovnice, Parciální diferenciální rovnice, Numerické metody a aplikace.

O. Borůvka zde proslovil zahajovací řeč a hned první den konference přednesl referát s názvem *Algebraische Elemente in der Transformations theorie der oszillatorischen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Výtah tohoto referátu vyšel ve sborníku abstraktů. Na Equadiffu II vystoupila se svými referáty řada členů Borůvkova semináře, například M. Greguš (*Über die linearen Differentialgleichungen höherer ungerader Ordnungen*), Z. Hustý (*Transformation der homogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung*), F. Neuman (*On Bounded Solutions of a Certain Differential Equation*), M. Ráb (*Les développements asymptotiques concernant les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre*), V. Šeda (*An Application of Green's Function in the Theory of Differential Equations*), M. Švec (*Recherches des solutions des équations différentielles sur un intervalle infini et le théorème du point invariant*), M. Zlámal (*Discretisation and Error Estimates for Elliptic Boundary Value Problems*) a mnoho dalších českých a slovenských matematiků.

V Publikace a jejich charakteristika

První kapitola této části je věnována osudu některých Borůvkových prací. Všimneme si zde recenze první Borůvkovy práce [1], jež vyšla v *Referativním Žurnálu* a následné reakce O. Borůvky na tuto recenzi v práci [2]. Dále nahlédneme do zákulisí vzniku a vydání Borůvkovy německé monografie [16] a budeme se snažit odpovědět na otázku, proč nikdy nebyla vydána učebnice o diferenciálních rovnicích, na níž O. Borůvka začal pracovat již ve čtyřicátých letech a znovu se pak k ní vrátil v letech šedesátých.

Druhá a třetí kapitola přináší seznam a charakteristiku publikací O. Borůvky, které se týkají teorie fází, dispersí a transformací. Není zde uveden seznam všech vědeckých prací O. Borůvky, neboť ten lze nalézt v monografii *Otakar Borůvka* [A43]. Oproti seznamu uvedenému v monografii jsou však některé citace opraveny a jsou přidány práce [2] a [33].

Charakteristika příslušných prací vychází ze dvou základních zdrojů. V případě, že byla daná práce recenzována v *Mathematical Reviews* (MR) nebo v *Zentralblatt für Mathematik* (Zbl), jsou uvedeny přesné citace těchto recenzí (v jazyce, ve kterém byly recenze zveřejněny). V případě, že daná práce recenzována nebyla, je uvedena její stručná charakteristika česky.

Důvodem zařazení přesných citací z MR a Zbl je to, že uveřejněné recenze dávají dosti přesný obraz o obsahu jednotlivých publikací a mnohdy i názor na ně. Nemusí být bez zajímavosti ani porovnání názorů různých recenzentů. Je samozřejmé, že tento materiál není příliš homogenní. To souvisí s politikou vydavatelů zmíněných referativních časopisů; ta se v průběhu let z různých důvodů měnila.

1 O osudu některých prací

1.1 Poznámky k Jelšinově recenzi Borůvkovy práce [1]

19. března 1956 píše O. Borůvka E. Čechovi: *Osměluji se obrátit se na Tebe se žádostí o radu ve vážnější věci, ačkoli nevím, zda je vhodné Tě jakkoli zatěžovat. V 1. čísle Refer. žurnálu, 1956 (406), které jsem před několika dny obdržel, vyšla recense M. I. Jelšina mojí práce o dispersích, kterou jsem uveřejnil v našem mezinár. časopisu v r. 1953. Recenze se jen hemží nepřesnostmi a chybami, takže považuji za nutné na ni odpovědět.*

Odpověď publikoval O. Borůvka v práci [2] v Czech. Math. J., kde přehledně v šesti hlavních bodech cituje Jelšinovy omyly a uvádí je na pravou míru. Práce [2] do redakce časopisu došla 26. března 1956. Pro ukázku citujme překlad některých částí Jelšinovy recenze a následné odpovědi O. Borůvky.

Jelšin: *V důsledku autor odvozuje rovnici*

$$\sqrt{|\xi'|}(|\xi'|^{-\frac{1}{2}})'' + \xi'^2 Q(\xi) = q(x) \qquad (2)$$

a dochází k nepochopitelnému závěru, že každé řešení dif. rovnice (2) *definované v intervalu* $(-\infty, \infty)$ *je vlastní dispersí (1. druhu). Ve skutečnosti, obecný integrál rovnice* (2) *(Jelšin M. I.,* *Dokl. AN, 1949, 68, č. 3, 221 – 224) má tvar*

$$\int_x^{\xi(x)} [(Au+Bv)^2+v^2]^{-1} A d\xi = C\pi, \qquad (b)$$

kde u a v je fundamentální systém řešení dif. rovnice $y'' = Q(x)y$ s počátečními podmínkami $u_0 = 1$, $u_0' = 0$, $v_0 = 0$, $v_0' = 1$, $A = w \neq 0$, B a C jsou libovolné konstanty.

Borůvka: *Ve skutečnosti se v uvedené recensentově práci dif. rovnice (2) ani jiná dif. rovnice 3. řádu nevyskytuje. Tvrzení, že obecný integrál dif. rovnice (2) má tvar (b) je nesprávné, protože všechny integrály určené rovnicí (b) rostou ($\xi'(x) > 0$), kdežto dif. rovnice (2) má vždycky také integrály, které klesají (např. $Q(x) = -1$, $\xi(x) = -x$). Můj výsledek není nepochopitelný, protože vlastní disperse 1. druhu splňují dif. rovnici (2) (19,1)*[12] *a závisí, stejně jako řešení dif. rovnice (2), na třech parametrech (20,4, 23).*

Celkově lze říci, že se Jelšin dopouští mnoha nepřesností a chyb. Nesprávně reprodukuje i základní pojmy jako jsou centrální disperse. Zaměňuje například pojmy centrálních dispersí druhého a třetího druhu aj. Přitom neuvádí nic o hlavních výsledcích Borůvkovy práce, tj. o grupě vlastních dispersí 1. druhu, o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice rovnice (2) a o řešení této rovnice.

Reakce O. Borůvky na Jelšinovu recenzi vyšla v Czech. Math. J. koncem roku 1956. Dne 10. května 1957 píše profesor Moskevské univerzity V. V. Němyckij O. Borůvkovi objasňující dopis. Citujme překlad tohoto dopisu:

Vážený profesore Borůvko,
já jako redaktor oddílu diferenciálních rovnic Referativního Žurnálu Matematika se Vám upřímně omlouvám, že jsme tak dlouho nereagovali na Vaše poznámky k recenzi M. I. Jelšina. Referát Jelšina skutečně nedostatečně odrazil výsledky Vaší velké práce, která našla dále, v pracích jiných československých vědců mnohonásobné odezvy. V blížícím se čísle (N° 2-1957) uveřejníme můj doplněk k této recenzi. Způsobilo nám obtíže to, že Vaše terminologie nesouhlasí s terminologií užívanou v jiných pracích o rozložení nulových bodů řešení diferenciálních rovnic. Naši recenzenti jsou postaveni před těžký úkol při snaze srovnat Vaše výsledky a výsledky Vašich četných spolupracovníků s výsledky již existujícími v matematické literatuře. A je to tím obtížnější, že samotní autoři těchto prací také nedělají dostatečně úplná srovnání. A právě tímto se objasňuje neúplnost referátu M. I. Jelšina. Nyní je nám známá Vaše terminologie a tak doufáme, že práce Vaší školy budou recenzovány dostatečně úplně.

Zmiňovaný doplněk k recenzi M. I. Jelšina vyšel na poslední straně *Referativního Žurnálu* 2–1957. Ocitujme jeho překlad:

Jako doplnění k referátu na článek O. Borůvky О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка redakce považuje za nutné ukázat, že článek obsahuje následující.

[12] Číslo v závorce značí kapitolu a odstavec, tak jak jsou očíslovány v práci [1].

Nechť je x – libovolné číslo a A – množina řešení rovnice

$$y'' = Q(x)y \qquad (a)$$

s nulovým bodem x a B - množina takových řešení, kde x je nulovým bodem derivace. Provádí se vyšetřování čtyř nekonečných posloupností funkcí. $\varphi_n(x)$ $(\varphi_{-n}(x))$ označuje n-tý nulový bod řešení z množiny A následující za bodem x (předcházející bodu x), $\psi_n(x)$ $(\psi_{-n}(x))$ – n-tý nulový bod derivace řešení z množiny B následující za bodem x (předcházející bodu x), $\chi_n(x)$ $(\chi_{-n}(x))$ – n-tý nulový bod derivace řešení z množiny A následující za bodem x (předcházející bodu x), $\omega_n(x)$ $(\omega_{-n}(x))$ – n-tý nulový bod řešení z množiny B následující za bodem x (předcházející bodu x).

Tyto čtyři posloupnosti funkcí se nazývají centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu.

Dále se vyšetřuje řada obecných vlastností centrálních dispersí, například spojitost, monotonnost nebo existence derivací. Ukazují se také některé, i když neefektivní, vyjádření dispersí pomocí $Q(x)$.

Pro objasnění dalších vlastností dispersí se spolu s danou rovnicí zkoumá rovnice

$$\sqrt{|\xi'|}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi'}}\right)'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x). \qquad (b)$$

Souvislost mezi rovnicemi (a) a (b) je dána tím, že podíl $y(\xi)/\sqrt{|\xi'|}$, sestavený z libovolného řešení rovnice (a) a libovolného řešení rovnice (b), je řešením rovnice (a). Řešení rovnice (b) tvoří množinu tzv. obecných dispersí a tvoří spojitou grupu.

Dále se vyšetřují vlastnosti této grupy a její vyjádření.

V. V. Němyckij

Na tuto recenzi reaguje O. Borůvka dopisem z 28. srpna 1957 profesoru V. V. Němyckému, kde čteme:

S Vaší recensí zcela souhlasím a děkuji Vám, že jste se této věci ochotně ujal. Těší mne, že tato příhoda vedla k našemu sblížení, od něhož zajisté právem mohu očekávat vědecký užitek pro naši matematiku.

Současně s tímto dopisem zasílá O. Borůvka V. V. Němyckému separáty některých svých prací a vyslovuje zájem o budoucí spolupráci.

Nakonec jen poznamenejme, že i Němyckého doplněk k recenzi obsahuje chybu a to ve vzorci (b), kde je dvakrát chybně uvedeno φ místo správného ξ.

1.2 Úmysl O. Borůvky sepsat knihu o diferenciálních rovnicích

V I. části práce, v odstavci *Rozhodnutí věnovat se diferenciálním rovnicím*, jsme ocitovali část vzpomínek, v nichž O. Borůvka uvádí, že koncem roku 1944 hovořil v Praze s F. Vyčichlem o budoucím zaměření své vědecké práce a vůbec celé poválečné matematiky u nás.

Z následujících citací z korespondence O. Borůvky je ovšem patrné, že ke zmiňovaným rozhovorům muselo dojít o hodně dříve, nejspíše koncem roku 1942. Již počátkem roku 1943 totiž O. Borůvka uvažuje o sepsání učebnice o diferenciálních rovnicích.

23. ledna 1943 píše O. Borůvka F. Vyčichlovi:

Pan prof. Klíma mně vyřídil Váš dotaz o diferenciálních rovnicích v tom smyslu, jak jsme o tom spolu v Praze hovořili. V poslední době jsem o věci častěji uvažoval a kloním se k tomu, že se do sepsání rukopisu pustím. Předem bych však rád znal Váš názor, k jaké hlavní potřebě by knížka měla sloužiti. Patrně by byla určena hlavně pro adepty matematiky, ale měl by se vzíti zřetel na její případné použití (technikové, inženýři)? Pak, v jakém asi rozsahu by byl rukopis nejvhodnější? Dále by bylo nutno se vyrovnati s otázkou, pokud uvažovati o komplexním oboru, ale tato věc se již podřadí celkovému rázu knížky. Vyšla by knížka v Kruhu nebo v Knihovně?[13] *Prosil bych Vás, milý kolego, kdybyste mně laskavě napsal Vaše přání a pak bychom se o věci blíže dohodli.*

Odpověď dostává 4. února 1943:

... děkuji Vám za dopis z 23. 1. 43 a za laskavý příslib, že nám knížku o diferenciálních rovnicích napíšete. Mám na mysli tyto věci: V Cestě[14] *by vyšla úvodní knížka (elem.) o diferenciálních rovnicích s konstantními koeficienty, která by obsahovala nejnutnější pojmy pro fysiky a geometry v 1.-3. semestru. Tuto knížku mi přislíbil napsat Dr. M. Katětov a začínáme o věci hovořit. Vaše knížka by mohla tuto předpokládati. Šlo by tedy o diferenciální rovnice jako učební látku pro posluchače matematiky a fysiky, kteří mají 1. státní zkoušku. Ovšem byl bych rád, kdyby svým způsobem výkladu, provedenými příklady a cvičeními byl vzat zřetel na potřeby fysiků a techniků. Knížka vyjde pro Knihovnu a počítám s rozsahem asi 20 archů. (Zřetel k technikům bude míti dvě dobré stránky: Přispěje k prohloubení matematiky v jejich kruzích a získá nám nové přátele a umožní nad to, abychom vydali víc kusů). Pokud se týká oboru, v němž se má výklad díti: Bude rozhodně záležet na Vás, ale dovolte mi, abych k tomu řekl toto: Výklady při použití komplexního oboru budou přehlednější, než omezíte-li se na pole reálné. Aplikace ale potřebují reálné výsledky (fysika, elektrotech.). Některé, pro praxi důležité rovnice budou chtít býti probrány v oboru reálném.*

Budu Vám povděčen pane profesore, když tyto bolesti nám odstraníte a já vím, že to dobře umíte a provedete.

Většina ostatní korespondence této doby se týká vydání Borůvkovy knihy *Úvod do teorie grup*. Jen občas se v dopisech F. Vyčichla O. Borůvkovi vyskytují otázky typu *Co dělají rovnice?* nebo *Již jste se rozhodl ve věci Kamkeho knihy?* apod.

16. června 1943 píše F. Vyčichlo O. Borůvkovi:

... Knihy Sansonovy teď nepotřebuji, až o prázdninách bych rád si je prohlédl; proto si je prosím ponechte.

Vaše stanovisko o rozdělení knihy o diferenciálních rovnicích na dva díly, abyste nemusel řadu věcí pomocných sám uvádět, velmi vítám. Přitom Vás upozorňuji, že vyjde vlastně nové vydání Petrova difer. počtu; je to kniha Jarníkova: Dif. počet, I. a II. díl. Bude proto dobře, když Vám buď obstarám obsah, přejete-li si toto, nebo Vy pane profesore napíšete, které věci potřebujete, abych to zjistil.

Kniha Kösslerova o funkcích komplexní proměnné se také dokončuje; kdybyste pomýšlel už nyní na 2. díl, mohl bych i obsah od prof. Kösslera Vám obstarat.

[13] Kruh a Knihovna byly názvy sbírek JČMF.

[14] Cesta byla taktéž jedna se sbírek JČMF.

Nějaké poznámky najdeme i v dopisech zaslaných V. Kořínkovi. Například 28. 6. 1943 se O. Borůvka zmiňuje o tom, že *... bych se Vás dovolil navštíviti a vrátil s díkem Vaše knihy o dif. rovnicích.* 7. prosince 1943 již píše: *Nyní pilně studuji a spisuji diferenciální rovnice, ale kniha jest ještě v daleké budoucnosti.*

Již v roce 1945 měl O. Borůvka zřejmě hluboké znalosti z diferenciálních rovnic, o čemž svědčí i následující úryvek z dopisu V. Kořínka ze dne 16. března 1945:

... Nevím, zda víte, že máme zřízenou při Jednotě matematickou poradnu, kam přicházejí různé dotazy od členů. Dosud to byly hlavně dotazy týkající se studia neb žádající vysvětlení nějakých míst v učebnicích, na které jsem celkem odpovídal sám. Docent Hampl nám však poslal dotaz o diferenciálních rovnicích vědeckého rázu, který zasílám v příloze. Z pražských pánů nikdo o věci nic neví. Obracím se tedy na Vás s dotazem, zda o věci snad něco nevíte. ...

O. Borůvka na to obratem 20. března odpovídá, že přiložený způsob řešení je chybný a zasílá protipříklad.

Vraťme se však k zamýšlené knize O. Borůvky o diferenciálních rovnicích. Jak jsme se dozvěděli z předchozích dopisů, měly ve skutečnosti vyjít knihy dvě. Jedna elementární, kterou slíbil napsat M. Katětov a druhá, na níž pracoval O. Borůvka. Přitom Borůvkova kniha měla být rozdělena na diferenciální rovnice a reálném oboru a diferenciální rovnice v komplexním oboru. V průběhu let však nastaly mnohé změny. O jedné z nich se dovídáme z dopisu F. Vyčichla E. Čechovi z 21. března 1948:

... děkuji Vám za dopis, přišel zároveň s dopisem prof. Kauckého, který sděloval, že knížku pro Cestu o difer. rov. napíše. .... Děkuji Vám, pane profesore, že jste svou laskavostí celou záležitost pomohl rozřešit a že budete tak laskav a prof. Kauckému poskytnete pro knížku několik úloh.

Poznamenejme, že na rozdíl od M. Katětova, jež knihu o diferenciálních rovnicích nenapsal, J. Kaucký svému slibu dostál a roku 1953 vydal *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic* (Nakl. ČSAV, Praha, 1953, 222 str.).

Kolem roku 1949 se v souvislosti s knihou O. Borůvky již začalo hovořit o přesnějším termínu dodání rukopisu. Citujme z dopisu O. Borůvky F. Vyčichlovi z 15. ledna 1949:

Milý pane kolego,

Dovolte, abych přátelsky protestoval proti znění zápisu o řádné valné schůzi JČMF ze dne 30. listopadu 1948, který je uveřejněn ve spolkovém věstníku Časopisu, roč. 73 (1948), D 29, pokud se týká mne v souvislosti s rukopisem o diferenciálních rovnicích. Stojí tam, že jsem lhůtu určil na další jeden rok. Považuji toto znění za naprosto nepřesné, poněvadž lze je chápati v tom smyslu, že lhůta, kterou jsem dříve dal, již prošla a že ji nyní o jeden rok prodlužuji. Nuže, jistě to tak není míněno, protože až do minulých prázdnin, kdy jsem dostal Váš dotaz o pravděpodobném dodání rukopisu, nebyla nikdy o nějaké pevné lhůtě řeč, třebaže všichni dobře víme, že kniha o diferenciálních rovnicích je velmi potřebná. Za druhé, v odpovědi na Váš prázdninový dopis jsem uvedl, že se chci přičinit, abych rukopis během roku dokončil, že však nemohu s určitostí slíbit zda se mně to podaří. Nemohu Vám prostě žádnou pevnou lhůtu určit, protože nesmírné množství povinností, z nichž některé jsou zcela nepředvídané a kterých spíše přibývá než ubývá, to vylučuje. Ostatně sám to naznačujete pokud jde o kol. Kořínka, a z vlastní zkušenosti to dobře *znáte. Skutečně nevím, zda jsem někdy pevně stanovenou lhůtu, ať v jakékoli věci, překročil a tuto vlastnost bych si rád zachoval. Jistě mně nezazlíte, jestliže opětovně poznamenám, že jsem si dobře vědom nutnosti brzkého vydání učebnice o dif. rovnicích a že se chci o to přičinit. Nemohu však pracovat pod tlakem blížícího se data a za žádných okolností nepustím ven rukopis, s nímž bych nebyl zcela spokojen a který by nevyhovoval podmínkám dobré učebnice po stránce didaktické, vědecké, obsahové, jazykové a při tom pokud možno originální. Prosil bych Vás, milý pane kolego, abyste se smířil s tímto stavem věci a věřil v moji nejlepší vůli.*

21. října 1949 píše F. Vyčichlo O. Borůvkovi:

Vážený pane profesore,

potřebuji (pro tiskár. podniky) uvésti datum, kdy předložíme Váš rukopis Difer. rovnic I. k sazbě. Plánujeme jej pro r. 1950 – druhé pololetí. Je to tak správně? Prosím Vás o takové sdělení. A jaký bude Váš plán s Difer. r. II.? (Obsah – doba.). Děkuji Vám předem za řádky a srdečně Vás pozdravuji.

Oddaný F. Vyčichlo

O. Borůvka odpovídá F. Vyčichlovi 31. října 1949:

Milý pane kolego,

Na Váš dotaz ve věci d. rovnic Vás prosím, abyste d. rovnice zatím závazně neuváděli v publikačním plánu v r. 1950. Přičiňuji se se všech sil, avšak závazek by mne zneklidňoval a práci spíše brzdil než podporoval. V minulém stud. roce jsem se v důsledku nových nepředvídaných úkolů předsednictví reformní komise na přírod. fakultě (dvojí stěhování, školení), které ještě přistoupily k mému velkému zatížení, v práci na d. rovnicích opozdil. Nyní jsem se (sice obtížně ale přece) vzdal úvazku na technice a vzhledem ke svému předsednictví ve Správní komisi sociální jsem byl uvolněn z předsednictví reformní komise a tak doufám v možnost rychlejšího postupu. Slibuji Vám znovu, že dodám dobrou věc, ale ještě prosím o trpělivost. Jistě kol. Kořínek je na tom podobně. Zatím Vám nabízím do publikačního plánu druhé vydání Úvodu do theorie grup. První vydání se mně po didaktické stránce velmi dobře osvědčilo a změnil bych v něm jenom to, že bych jednotlivé kapitoly rozdělil do menších odstavců a opatřil je nápisy za účelem lepší přehlednosti. Pokud jde o d. rovnice v komplexním oboru, ty jsou velmi daleko. Moje knížka o d. rovnicích v reálním oboru bude obsahovat mnoho látky a podá přehled po největší části theorie d. rovnic, myslím, že v některých směrech lépe než na př. Kamke nebo Sansone. Toho lze dosáhnouti v poměrně nevelkém objemu, neboť se v elementech mohu odvolat na české učebnice (Petr, Jarník, Čech). Myslím, že v komplexním oboru by zatím byly velké obtíže. Budu velmi šťasten, až splním svůj dluh v reálním oboru. To mne zbaví mimo jiné i obavy, že bych mohl přijít do souvislosti s d. rovnicemi asi takové, jakou má nebožtík prof. Sobotka s diferenciálním počtem.

Srdečně Vás, milý pane kolego, pozdravuji a těším se, že se zase vbrzku uvidíme.

A to je jedna z posledních zmínek o této Borůvkově knize o diferenciálních rovnicích. Co bylo příčinou přerušení práce na této knize a jejího nevydání?

Připomeňme, že od roku 1945 O. Borůvka zahrnuje problematiku diferenciálních rovnic do seminářů pro studenty, od roku 1948 vede vědecké semináře zaměřené na obtížnější otázky z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Již v prvním pololetí 1951 zařazuje do svých přednášek v seminářích nové výsledky z teorie dispersí. Je tedy zřejmé, že počátky teorie dispersí byly položeny již v roce 1950 a lze říci, že tímto rokem se O. Borůvka začíná plně věnovat své nové teorii.

Ve zprávách o publikační a vědecké činnosti za roky 1950 až 1953 O. Borůvka sice uvádí, že pracuje na obsáhlé knize o diferenciálních rovnicích, zřejmě již však s jiným cílem i obsahem.

Poznamenejme, že roku 1950 vyšel Čechův překlad knihy V. V. Stěpanova *Kurs diferenciálních rovnic* (Přírodovědecké nakl., Praha, 1950) a roku 1953 již zmíněná Kauckého kniha *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*.

Kauckého kniha je určena hlavně pro posluchače technických škol a pro techniky z praxe. Předpokládá pouze znalost některých základních věcí z diferenciálního a integrálního počtu. A podle slov autora by si ji měl pročíst každý, kdo se chce pustit do studia nějakého rozsáhlejšího a důkladnějšího díla o diferenciálních rovnicích – např. do díla V. V. Stěpanova.

Další knihou o diferenciálních rovnicích, která byla již v roce 1951 připravena k tisku byla publikace J. Hronca *Diferenciálne rovnice I – obyčajné diferenciálne rovnice* (Vydavatelství SAV, Bratislava, 1956, 370 str.). O. Borůvka hodnotí v červnu 1951 tuto knihu takto:

Předložený rukopis se vyznačuje bohatým výběrem klasické látky, která přesahuje rámec novějších učebnic světové literatury (na př. český překlad knihy V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, 1950). Čtenář, který sáhne po knize za účelem získání prvního poučení o d. rovnicích nebo za účelem aplikací ve fysice nebo v inženýrských vědách, najde v ní řadu příkladů zaměřených k samostatnému procvičení látky; pokročilejší čtenář ocení přehled po metodách a výsledcích klasické theorie d. rovnic, který mu četba knihy přinese. S těchto hledisek znamená předložený rukopis cenný přínos naší matematické knižní literatuře.

Co se týče knihy O. Borůvky, důvodem jejího nevydání v této etapě bylo zřejmě nejdříve zdržení kvůli výše deklarované důkladnosti a později orientace O. Borůvky na novou teorii dispersí a transformací. Jistě k tomu přispělo také vydání již zmíněných knih o diferenciálních rovnicích. Za první učební text O. Borůvky o diferenciálních rovnicích lze považovat až skripta *Diferenciálne rovnice*, jež vyšly v Bratislavě roku 1961. Lze se jen dohadovat, nakolik jsou tyto skripta onou zamýšlenou knihou o diferenciálních rovnicích.

1.3 Kapitoly z klasické a moderní teorie obyčejných diferenciálních rovnic

V tomto odstavci si všimneme osudů další práce, která nakonec nebyla vydána. Znovu se jedná o českou učebnici o diferenciálních rovnicích, která tentokrát měla být knižním zpracováním slovenských skript.

Dne 9. února 1960 uložilo Presidium ČSAV sekcím, aby zjistily na svých pracovištích náměty publikací, které přicházejí v úvahu v nejbližších třech letech pro sestavení perspektivního plánu pravděpodobných námětů na léta 1961 – 1963. Za tímto účelem obeslala I. sekce ČSAV všechny své členy a pracoviště s žádostí o případné návrhy.

Dne 25. února 1960 O. Borůvka uvádí následující návrhy publikací, které by mohl realizovat:

1. *Úvod do teorie grupoidů a grup. (Učebnice, o jejíž vydání se jedná v nakladatelství ČSAV. Rukopis je ukončen a může býti dodán v krátké lhůtě.)*

2. *Kapitoly z klasické a moderní teorie diferenciálních rovnic. (Učebnice obsahující základy teorie diferenciálních rovnic reálních funkcí v exaktním podání a též přihlížející k nejnovějším výsledkům v tomto oboru. Rukopis je v pokročilém stadiu.)*

V odpovědi na tento návrh ze 6. června 1962 čteme, že kolegium matematiky ČSAV zařadilo publikaci *Kapitoly z klasické a moderní teorie diferenciálních rovnic* do návrhu edičního plánu z matematiky a za tím účelem žádá o podrobnější informace o této učebnici. O. Borůvka v odpovědi mimo jiné uvádí, že *učebnice je knižním zpracováním vysokoškolského učebního textu "Diferenciálne rovnice", který vyšel v r. 1961 v Bratislavě.* Dobu dodání rukopisu navrhuje na konec roku 1964.

18. května 1964 žádá J. Kurzweil[15] O. Borůvku o sdělení, v jakém stadiu rozpracovanosti je rukopis učebnice a zda bude dodržen předpokládaný termín dodání rukopisu v roce 1965. O. Borůvka na to odpovídá:

... rukopis mé budoucí knihy ... je v pokročilém stádiu rozpracování. Vzhledem k tomu, že současně pracuji na jiném souborném díle z oboru diferenciálních rovnic[16]*, které mám ukončit během tohoto nebo začátkem příštího roku, prosím, abyste s odevzdáním rukopisu „Kapitoly" počítal během roku 1966.*

O rok později znovu žádá J. Kurzweil o sdělení stavu rozpracovanosti rukopisu a dodržení termínu dodání. Na to O. Borůvka odpovídá 9. května 1965 takto:

Myslím, že budu moci dodat rukopis knihy „Kapitoly z klasické a moderní teorie diferenciálních rovnic" koncem r. 1966 (podle plánu), takže by v r. 1967 mohl přijít do dalšího řízení popř. do výroby. Rukopis je v pokročilém stavu rozpracování a vzhledem k tomu, že jde v podstatě o prohloubení a rozšíření mých slovenských skript, doufám, že budu moci termín dodržet.

V edičním programu vysokoškolských učebnic na léta 1968 – 1970 je uvedeno, že rukopis učebnice *Kapitoly z klasické a moderní teorie diferenciálních rovnic* má být dodán v roce 1967 a vydání proběhne v roce 1969.

28. února 1966 píše Z. Knichalová z nakladatelství ČSAV O. Borůvkovi:

Dr. Kurzweil nám sdělil, že letošního roku skončíte dva rukopisy, a to český Kapitoly z klasické a moderní teorie diferenciálních rovnic a německý Theorie transformace obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, který chystáte pro Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Z. Knichalová dále žádá O. Borůvku o vyplnění formuláře, tzv. Nabídky autora, jež je nutný k zahájení schvalovacího řízení rukopisu předkládaného díla. Autor zde uvádí základní informace o díle, jako je jeho obsah, rozsah, charakteristika aj. Nabídku autora zasílá O. Borůvka ediční komisi vědeckého kolegia matematiky ČSAV 8. července 1966. Jako konečné datum pro dodání rukopisu stanovuje 31. prosinec 1967. V té souvislosti ale uvádí:

Nemohu však v této chvíli vyloučit menší zpoždění vzhledem k tomu, že mne v r. 1967 čekají korektury mé německé knihy, která je nyní v tisku.

Uveďme nyní přehled některých informací ze zmíněné Nabídky autora:

Název díla: *Kapitoly z klasické a moderní teorie obyčejných diferenciálních rovnic.*

Jakému okruhu čtenářů je dílo určeno: *Všem zájemcům s vědomostmi v rozsahu základních kursů o matematické analýze na vysokých školách universitního nebo technického směru.*

---

[15] V té době předseda ediční komise kolegia matematiky ČSAV.

[16] Jedná se o připravovanou německou monografii [16].

Charakteristika díla: *Dílo, které nabízím ke knižnímu vydání, má být zdokonalením slovenského vysokoškolského textu „Diferenciálne rovnice", který jsem vydal v r. 1961 a v dotisku r. 1965. V úvodu k tomuto textu jsem napsal: „Z velmi obsažné látky jsou ovšem v těchto skriptech zpracovány jenom některé kapitoly. Jejich výběr jsem učinil s ohledem na to, aby čtenář získal jednak solidní základy teorie obyčejných dif. rovnic, jednak široký rozhled po příslušných metodách a výsledcích. Zejména se snažím zavést čtenáře daleko od látky probírané v běžných učebnicích a v některých směrech až k výsledkům z nejnovější doby. Na mnohých místech, zejména tam, kde jsou možnosti širokého rozšíření vyložené látky, uvádím bez podrobnějšího výkladu přehledné pohledy na tyto širší teorie. Svůj výklad zpestřuji mnohými příklady, které jsem vybral se zřetelem k tomu, abych objasnil příslušné situace a zvýšil čtenářův zájem." Několikaleté zkušenosti, které jsem o těchto skriptech získal z prospěchu posluchačů při zkouškách a ze samostatného a iniciativního přístupu čtenářů ke studované látce, jsou nejlepší.*

Asi nejvýstižněji bych charakterisoval nabízené dílo jako monografickou příručku ke studiu teorie obyčejných dif. rovnic. Pokud jde o jednotlivé kapitoly, je každá z nich co do zpracování a často i obsahově původním pojednáním.

Mimo celkové netradiční pojetí přináší kniha řadu obsahově i metodicky nových popř. knižně dosud nezpracovaných poznatků. To se týká zejména obecné věty o jednoznačnosti řešení dif. rovnice $y' = f(x, y)$ *(uveřejnil jsem ji v r. 1956 v Acta Fac. rer. nat. Univ. Comenianae v Bratislavě), která již pronikla do světové literatury a zahrnuje většinu starších kriterií v příslušném směru. Dále jde o nové poznatky o Picardových posloupnostech pro zmíněnou dif. rovnici v případě, kdy se nepředpokládá platnost Lipschitzovy nebo jiné podobné podmínky, dále o původní teorii tzv. Peanovských funkcí, popisující závislost řešení uvedené dif. rovnice na počátečních podmínkách a na parametru, atd. Poslední kapitola má obsahovat hlavní výsledky o transformaci lineárních dif. rovnic 2. řádu, které jsou vhodně vybrány z výše zmíněné knihy o dif. transformacích. Mezi těmito výsledky zamýšlím zejména popsat souvislosti mezi zmíněnými transformacemi a obecnými větami z moderní algebry, zejména z teorie grup.*

Rozsah díla: *321 stran strojopisu celkem.*

V Nabídce autora uvedl O. Borůvka obsah knihy *Kapitoly*, který se však vůbec neliší od obsahu slovenských skript. Poněvadž je v archivu O. Borůvky uložen (i když neúplný) strojopis knihy *Kapitoly*, je zajímavé porovnat skutečný obsah *Kapitol* s obsahem slovenských skript.

Kapitoly měly pravděpodobně obsahovat 17 hlavních odstavců, porovnání je však možné jen u dvanácti, neboť 13. – 17. odstavec v uloženém strojopisu chybí. Porovnáním dojdeme k závěru, že rozsah v rámci 1. – 12. odstavce vzrostl přibližně o 50 stran. Některé části byly úplně přidány, mnohé odstavce pozměněny nebo rozšířeny. Obecně lze říci, že O. Borůvka rozšiřuje úvody k jednotlivým odstavcům, komentáře ke větám a doplňuje nebo upřesňuje mnohé důkazy.

Podrobnější informace o struktuře a obsahu slovenských skript i *Kapitol* lze získat z následně uvedeného obsahu.

K tomu jen poznamenejme, že obsah 1. – 12. odstavce je čerpán ze strojopisu knihy *Kapitoly*, přičemž zcela nově přidané odstavce (oproti slovenským skriptům) jsou označeny hvězdičkou ($\star$) a v závorce je uveden přibližný počet přidaných stran. Obsah 13. – 17. odstavce je převzat z Nabídky autora a je téměř totožný s obsahem slovenských skript. Podstatně se liší pouze 17. odstavec, jenž je v Nabídce autora mnohem rozsáhlejší než ve slovenských skriptech.

Obsah díla:

I. Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$.

[6] Rozšíření obsahu existenčních teorémů.
Rozšíření integrálů k hranici oboru dif. rovnice.
Existence extrémních integrálů procházejících daným bodem.
Rozšíření extrémních integrálů k hranici oboru dif. rovnice.
Extrémní složené integrály procházející daným bodem.
Existence a vlastnosti peanovských oborů.
Perronův existenční teorém.
⋆Intervaly integrálů procházejících blízkými body. (*2 str.*)
⋆Porovnávací teorémy za peanovských předpokladů. (*1 str.*)

[7] Závislost integrálů na počátečních podmínkách a na parametru.
Peanovské funkce.
Relativní a absolutní pravidelnost peanovské funkce.
Věta o relativní spojitosti peanovské funkce.
Hlavní věta o spojitosti peanovských funkcí.
⋆Způsob zjištění spojitosti peanovské funkce. (*0,5 str.*)
⋆Spojitost speciálních peanovských funkcí příslušných k dif. rovnici $y' = f(x, y) + s$. (*2 str.*)
⋆Druhý porovnávací teorém v případě spojitých funkcí v otevřených oborech. (*1 str.*)
⋆Spojitost speciálních peanovských funkcí příslušných k dif. rovnici $y' = f(x, y; s)$. (*1,5 str.*)

[8] Jednoznačné určení integrálů dif. rovnice $y' = f(x, y)$ počátečními podmínkami.
Pojem jednoznačnosti řešení dif. rovnice (a).
⋆Podmínky pro jednoznačnost řešení dif. rovnice (a). (*1 str.*)
Nutné a dostatečné podmínky pro jednoznačnost řešení.
Dostatečné podmínky pro jednoznačnost řešení.
Lipschitzova podmínka.
Rosenblatt-Nagumova podmínka.
Ukázka užitečnosti R.-N. podmínky.
Obecná věta o jednoznačnosti řešení.
⋆Speciální kritéria jednoznačnosti řešení. (*5 str.*)

[9] Ukázky použití předchozí teorie ke studiu speciálních dif. rovnic.
Dif. rovnice $y' = x - y^2$ (O. Perron).
⋆Dif. rovnice $y' = \sqrt{1 + 2sx - y^2}$ (E. Borel). (*7 str.*)

[10] Picardova metoda postupných aproximací.
Princip metody.
Důkaz existenčního teorému metodou postupných aproximací.
Vlastnosti Picardových posloupností.
Částečné posloupnosti.
Picardovy posloupnosti v případě, že funkce $f(x, y)$ je monotonní vzhledem k y.

II. Diferenciální rovnice vyšších řádů.

[11] Úvodní poznatky.
Základní pojmy.
Explicitní dif. rovnice a systémy.

[12] Základní vlastnosti systémů explicitních dif. rovnic prvního řádu.
Směrové pole.

Význam směrového pole.
Vektorové označení.
Přehled o základech teorie systémů explicitních dif. rovnic 1. řádu.

[13] Přehled o existenčních teorémech a větách o jednoznačnosti řešení systémů explicitních dif. rovnic 1. řádu.
Existenční teorémy.
Věty o jednoznačnosti řešení.

[14] Systémy lineárních dif. rovnic.
Základní pojmy a označení.
Homogenní lineární systémy.
Lineární relace mezi řešeními.
Kvadratické relace mezi řešeními.
Lineární systémy s konstantními koeficienty.
Nehomogenní lineární systémy.
Řešení nehomogenního systému.

[15] Lineární dif. rovnice n-tého řádu.
Existenční teorém v případě cauchyovských počátečních podmínek.
Obecné počáteční podmínky.

[16] Lineární dif. rovnice 2. řádu.
Úvod.
Elementární transformace dif. lineární rovnice 2. řádu.
Existenční teorém v případě cauchyovských počátečních podmínek.
Základní vlastnosti integrálů.
Závislé a nezávislé integrály.
Dif. rovnice $y'' = konst \cdot y$.
Piconeova identita.
Sturmova porovnávací věta.
Konjugovaná čísla.
Základy teorie centrálních dispersí.

[17] Základy teorie transformací dif. lineárních rovnic 2. řádu.
Úvod.
Kummerova dif. rovnice $-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$.
Transformační vlastnosti řešení Kummerovy dif. rovnice.
Úplné transformace.
Transformace oscilatorických dif. lineárních rovnic 2. řádu.
Grupa fází dif. lineárních rovnic 2. řádu.
Přehled o struktuře grupy fází.
Komplexy řešení Kummerových dif. rovnic v grupě fází.

Jaké byly další osudy této publikace?

Z předešlých citací víme, že rukopis *Kapitol* měl být dodán nakladatelství ČSAV koncem roku 1967 nebo o něco později. S vydáním se počítalo v roce 1969. Proč tato kniha nebyla nakonec vydána? Pokusme se následujícími řádky na tuto otázku odpovědět.

Pravděpodobné je, že se O. Borůvka s dodáním rukopisu opravdu zpozdil a to až do roku

1970. To lze soudit jednak z toho, že ve strojopisu *Kapitol* je u každého odstavce tužkou poznamenáno *četl doc. Neuman (datum), doc. Barvínek (datum)* a tyto datumy se pohybují od 27. 3. 1968 u odstavce druhého až po 12. 12. 1969 u odstavce desátého a jednak z následující citace z dopisu ministru školství z 19. ledna 1970:

Své životní dílo zdaleka nepovažuji za ukončené a jsem přesvědčen, že mohu bohatě rozdávat ze svých zkušeností. Mimo jiné mám rozpracovánu rozsáhlou knihu „Diferenciální rovnice v reálném oboru", která je krátce před ukončením.

Významnou roli v celé záležitosti zřejmě sehrálo to, že se O. Borůvka v bouřlivých událostech let 1968/69 připojil svým podpisem k rezoluci na podporu článku „2000 slov". Tento politický akt měl pro O. Borůvku nezanedbatelné následky v jeho činnosti pedagogické i publikační.

Již v lednu 1970 oznámila univerzita O. Borůvkovi své rozhodnutí rozvázat s ním k 1. 3. 1970 pracovní poměr. Proti tomuto rozhodnutí podal O. Borůvka 19. 1. 1970 odvolání ministru školství J. Hrbkovi, ve kterém podrobně popsal výsledky své práce, své funkce, vyznamenání a záměry a cíle do budoucna. Snaží se také vysvětlit a vzít zpět svůj podpis pod rezolucí:

Na mé činnosti v tomto směru je ojedinělý kaz vzniklý tím, že jsem se v červenci 1968 připojil k resoluci, kterou pracovníci matematického oboru na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně odeslali ÚV KSČ a předsednictvu NS na podporu článku „2000 slov". Resoluce nebyla určena k zveřejnění a žádným způsobem zveřejněna nebyla (nebyla zaslána do tisku, rozhlasu, televize a nebyla nikde vyvěšena). Hlavním jejím obsahem byl požadavek lidského a důstojného odchodu z funkcí lidí, kteří jsou neschopni svěřené funkce zastávat. Celkové znění resoluce je však nevhodné a je nutné je odsoudit. Bylo ovlivněno tehdejším nenormálním politickým ovzduším a kusými nebo nesprávnými informacemi. Upřímně lituji, že k podání resoluce došlo. Z těchto důvodů jsem dne 15. ledna 1970 vzal svůj podpis pod resolucí zpět a to ve společném prohlášení členů matematického oboru adresovaném ZO KSČ na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně, se žádostí o zveřejnění. [osobní spis O. Borůvky, archiv AV ČR]

Bohužel toto odvolání bylo zamítnuto a tak O. Borůvka neodvolatelně nastupuje od 1. 3. 1970 do starobního důchodu. Tím však celá záležitost neskončila. Již v únoru 1970 byl uvolněn z redakční rady *Spisů přírodovědecké fakulty*, v květnu byl zbaven funkce vedoucího redaktora časopisu *Archivum mathematicum* a také byly velmi omezeny jeho možnosti publikovat své práce, a to zejména v publikacích brněnské univerzity. Jedním příkladem je neuvedení plenární přednášky, kterou O. Borůvka proslovil na mezinárodní konferenci Equadiff III (Brno, 1972) v Proceedings této konference. Podrobněji o tom pojednává poznámka k práci [28] ve 3. kapitole *Charakteristika publikací.*

Výše uvedené události konce šedesátých a počátku sedmdesátých let jistě nesou svůj velký díl na tom, že kniha *Kapitoly* nebyla nikdy vydána.

Závěrem poznamenejme, že prvním učebním textem z diferenciálních rovnic vydaným na univerzitě v Brně byly skripta M. Rába *Elementární řešení diferenciálních rovnic* (Vydala UJEP, Brno, 1971, 98 str.).

1.4 Německá monografie [16]

V tomto odstavci nahlédneme do zákulisí tvorby a vydání německé monografie [16].

Dne 13. 10. 1960 dostává O. Borůvka dopis od šéfredaktora nakladatelství VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften pana Ulricha, ve kterém se začíná hovořit o vydání Borůvkových výsledků z oblasti diferenciálních rovnic:

... děkujeme Vám za rozhovor, který jste přátelsky poskytl našemu lektorovi pro matematiku v Budapešti [17] *a je nám ctí Vám sdělit, že bychom měli velký zájem zveřejnit Vaše novější výzkumné výsledky z diferenciálních rovnic v naší řadě „Mathematische Forschungsberichte".*

Bylo by nám příjemné, kdybychom už u příležitosti Vašeho pobytu zde v listopadu[18] *došli k uzavření smlouvy. Mohl byste nám přivézt obsah nebo nějaké exposé?*

3. prosince 1960 zasílá O. Borůvka na třech stranách stručný obsah zamýšlené publikace s názvem *Novější výsledky v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic*. Protože tento obsah dává dobrý obraz o původním plánu O. Borůvky, uvedeme jej v plném rozsahu:

Tyto výsledky se vztahují k obyčejným diferenciálním rovnicím (DR) prvního řádu $y' = f(x, y)$ *a k lineárním DR 2. řádu. Rozdělení látky do jednotlivých kapitol ještě nebylo provedeno (srv. poznámku na konci tohoto výkladu). Jako úvod ke každé kapitole se počítá s krátkým přehledem známých, ale ke čtení nezbytných skutečností. Vcelku by šlo zhruba o 5–6 kapitol, z nich dvě by byly věnovány DR prvního řádu, zbylé pak lineárním DR 2. řádu.*

1. Pro DR $y' = f(x, y) \quad (a)$ *je známa řada vět o jednoznačnosti, které popisují postačující podmínky pro jednoznačnost (unicitu) řešení (integrálů) DR* (a) *v nějakém bodě. Většinou se tato kritéria představují zadáním vhodných majorant pro funkci* $f(x, y_1) - f(x, y_2)$ *nebo pro její absolutní hodnotu. Toto výsadní postavení rozdílu sice nevypadá metodicky, ale je věcně oprávněné, neboť uvažování o funkcích závislých na* $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, *které jsou přizpůsobené poli rovnice (a), může být v jednotlivých případech velmi užitečné. Předkládá se tedy věta o jednoznačnosti pomocí vztahu ve tvaru*

$$\varphi'_x(x, y_1, y_2) + \varphi'_{y_1}(x, y_1, y_2) f(x, y_1) + \varphi'_{y_2}(x, y_1, y_2) f(x, y_2) \leq \Phi[x, y_1, \varphi(x, y_1, y_2)],$$

přičemž funkce φ *a* Φ *lze do značné míry volit libovolně a v konkrétním případě uzpůsobeně DR* (a). *Tato věta o jednoznačnosti obsahuje většinu klasických kritérií a kromě toho i výhodná kritéria nové struktury. Provedou se zajímavá vyšetřování, aby se vyjasnil její vztah k „obecné větě o jednoznačnosti" p. Kamkeho. Ukazuje se, že vzpomenutá věta není slabší než věta Kamkeova.*

2. Vyšetřují se postupné aproximace $y_0, y_1, \ldots \quad (1)$ *pro DR* (a), *přičemž pro řešení DR podmínky jednoznačnosti nejsou požadovány. Ukazuje se, že posloupnost* (1) *stále splňuje podmínky Ascoliovy věty a přesto podstatně závisí na volbě výchozí funkce* y_0. *I tehdy, když bodem* (x_0, y_0) *prochází pouze jedno řešení DR* (a), *se může stát, že žádná ze stejnoměrně konvergentních podposloupností posloupnosti* (1), *které jsou v posloupnosti* (1) *vždy obsaženy, k tomuto jedinému řešení nekonverguje. Pro tuto okolnost budou uvedeny zajímavé příklady.*

[17] V Budapešti se O. Borůvka zúčastnil II. Maďarského matematického sjezdu, jež se konal ve dnech 24. – 31. 8. 1960 (viz IV. část, 7. kapitola *Zahraniční cesty a mezinárodní konference*).

[18] Ve dnech 7. – 11. listopadu 1960 se O. Borůvka zúčastnil oslav 150. výročí založení Humboldtovy univerzity a 250. výročí založení Charité v Berlíně.

3. Transformační teorie pro lineární DR 2. řádu.

V transformační teorii pro lineární DR 2. řádu se jedná o to, že se integrály y, Y dvou DR Jacobiova typu

$$(a) \qquad y'' = q(t)y, \qquad Y'' = Q(T)Y \qquad (A)$$

navzájem do sebe transformují prostřednictvím vhodných funkcí $w(t)$, $X(t)$ ve smyslu formule

$$y(t) = w(t)Y[X(t)]. \qquad (l)$$

Poprvé o tomto problému pojednal E. E. Kummer v r. 1834, ale moderní transformační teorie, která by se jej týkala, dosud chybí. Význam takové teorie spočívá v tom, že se s její pomocí dá DR (a) přetransformovat na jednodušší rovnici, např. $Y'' = 0$ nebo $Y'' = -Y$. V dalším se předpokládá, že koeficienty q, Q jsou v intervalech j, J spojité.

Ústředním bodem nové transformační teorie je analýza nelineární diferenciální rovnice 3. řádu

$$-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t), \qquad (b)$$

kde $\{X, t\}$ představuje schwarzovskou derivaci neznámé funkce X v bodě $t \in j$. Zásadní význam má věta o existenci a jednoznačnosti řešení DR (b): Pro libovolné hodnoty $t_0 \in j, X_0, X_0'(\neq 0), X_0''$ existuje právě jedno nejširší řešení DR (b) s počátečními hodnotami $X(t_0) = X_0, X'(t_0) = X_0', X''(t_0) = X_0''$. Zejména se vyšetří takzvaná úplná řešení, která jsou definovaná v celém intervalu j a jejichž hodnoty pokryjí interval J. Pomocí úplných řešení se integrály DR $(a), (A)$ v celém svém průběhu transformují navzájem ve smyslu formule (l). Zejména se vyšetří otázky existence a vlastnosti úplných řešení a mimo jiné i struktura jimi vytvořené množiny.

Důležité místo v této transformační teorii zaujímá teorie tzv. dispersí. Tato teorie má úzký vztah k transformaci integrálů DR (a) na integrály téže rovnice, přičemž koeficient q je spojitý a záporný v intervalu $(-\infty, \infty)$ a integrály se předpokládají oscilatorické. Výchozím bodem teorie dispersí jsou jisté funkce, které se nazývají centrální disperse 1., 2., 3. a 4. druhu a popisují „rozptyl“ nulových bodů integrálů a jejich derivací. Např. hodnota centrální disperse 1. druhu s indexem $\nu(= \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ v bodě $t \in (-\infty, \infty)$, $\varphi_\nu(t)$ je ν-tým konjugovaným bodem napravo nebo nalevo podle toho, zda je $\nu > 0$ nebo $\nu < 0$; kromě toho se definuje $\varphi_0(t) = t$.

Centrální disperse jsou přístupné hluboké analýze a vyznačují se četnými jednoduchými a zajímavými vlastnostmi. Např. centrální disperse φ_ν jsou třídy C_3 a splňují nelineární DR 3. řádu

$$-\{X, t\} + q(X)X'^2 = q(t). \qquad (\bar{b})$$

Řešení této DR $(\bar{b})$ definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$ tvoří spojitou tříparametrickou grupu $\mathfrak{G}$, jejíž algebraickou strukturu lze obsáhle popsat. Dále pak lze udat konstrukci integrálů DR $(\bar{b})$.

Aplikace vyšetřované teorie transformací jsou četné. Tato teorie se hodí zejména k řešení problémů, v nichž se mají určit všechny DR (a) s předem danými vlastnostmi integrálů. Tak byly např. určeny všechny DR (a), jejichž integrály mají předepsaný počet nulových bodů, dále všechny DR (a) s ekvidistantními nulovými body integrálů nebo s dvojicemi nezávislých integrálů u, v se společnými nulovými body součinů uu', vv'. Dále vedla transformační teorie k jiným cenným výsledkům, např. k zobecnění Floquetovy teorie na DR (a) s neperiodickými koeficienty a k různým aplikacím v teorii lineárních DR 3. a 4. řádu.

4. V teorii lineárních DR 2. řádu se v poslední době dosáhl další významný pokrok. Např. přesnější analýza všech prací o oscilačních kritériích pro lineární diferenciální rovnice 2. řádu dala výsledek, že všechna tato kritéria lze v podstatě vyjádřit pomocí samotných dvou formulí.

5. Poznámka. Bylo by případně možné se omezit na vyšetřování lineárních DR 2. řádu, kdyby se mělo ukázat, že zahrnutí výše zmíněných otázek o DR $y' = f(x, y)$ vede k příliš velkému rozsahu práce. V tomto případě by přirozeně bylo žádoucí zvolit pro práci jiný titul.

Brno, 3. listopadu 1960 *Dr. Otakar Borůvka*

Termín odevzdání rukopisu byl stanoven na konec roku 1961. Ovšem, stejně jako například u knihy *Kapitoly*, O. Borůvka termín odevzdání rukopisu několikrát posouval a měnil také obsah připravované knihy. O prvním nedodržení termínu pojednává následující citace z dopisu O. Borůvky berlínskému nakladatelství z 8. března 1962:

Delší dobu se odhodlávám (tentokrát s pocity dlužníka) Vám napsat. Nezapomněl jsem na domluvu mezi mnou a p. Bollem, která se týkala napsání práce o nových výsledcích v oblasti obyčejných dif. rovnic pro Vaši řadu „Mathematische Forschungsberichte" a jsem si plně vědom toho, že lhůta odevzdání rukopisu 31. 12. 1961 již uplynula. Bohužel nemohu lhůtu vzhledem k četným funkcím dodržet, přičemž roli hrála i ta skutečnost, že jsem při zpracovávání látky narazil na nové zajímavé problémy, jejichž vyřešení a zahrnutí do práce se mi zdá být vhodné. Požádal bych Vás o omluvu tohoto zpoždění a o zprávu, zda stále ještě máte zájem tuto práci vydat. V kladném případě bych uvažoval o dokončení rukopisu během roku 1962.

Přátelskou odpověď s návrhem nového termínu dostává O. Borůvka obratem 23. března 1962:

... a sdělujeme Vám, že stejně jako dříve máme zájem vydat Vaši práci a těšíme se z toho, že jste mezitím dosáhl další nové výsledky.

Souhlasili bychom s tím, že nám koncem roku 1962 nebo počátkem 1963 zašlete rukopis tak, že by kniha mohla vyjít počátkem roku 1964. Jestli s tímto souhlasíte, mohli bychom nyní připravit nakladatelskou smlouvu.

V dopise z 21. června 1962 O. Borůvka termín odevzdání ještě trochu posouvá a mění také původně navrhovaný název práce a její obsah. Nadále zamýšlí zahrnout do práce pouze výsledky z teorie transformací, nikoliv výsledky týkající se otázek jednoznačnosti řešení rovnice $y' = f(x, y)$:

Dovoluji si Vám předem sdělit, že stejně jako dříve pomýšlím na vydání své práce o diferenciálních rovnicích u Vašeho nakladatelství a přirozeně souhlasím s přípravou nakladatelské smlouvy. Za tím účelem si dovoluji sdělit následující (předběžná) data:

Název: Transformační teorie obyčejných diferenciálních rovnic

Rozsah: zhruba 8 tiskových archů

Odevzdání rukopisu: do 31. července 1963.

V další korespondenci mezi O. Borůvkou a berlínským nakladatelstvím VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (dále DVdW) z roku 1962 se jedná o právech ohledně vydání. DVdW sděluje, že nemohou převzít odpovědnost za vydání v německém jazyce, jestliže si nebudou jisti, že tato kniha nevyjde v anglickém nebo francouzském vydání. Česká organizace Dilia (Československé divadelní a literární jednatelství), která zastřešovala jednání ohledně vydání této knihy, sděluje, že není ochotna předávat celosvětová práva na vydání nakladatelstvím mimo ČSSR.

Uveďme stručně citace z několika dopisů, jež se týkají organizačních záležitostí okolo vydání této práce:

DVdW (13. září 1962): *Paní Šimicová*[19] *nás informovala, že souhlas Dilie by byl dosažitelný, kdyby se dílo tisklo v ČSSR. Budeme v této záležitosti jednat s naším Deutschen Buch-Export und Import GmbH, jelikož výrobní pověření mimo NDR je možno zadat jenom přes tuto organizaci.*

DVdW (2. listopadu 1962): *Náš knižní export v zásadě souhlasí s tím, že Vaše plánované dílo bude vytištěno v ČSSR. Jelikož dle sdělení paní Šimicové pak pro zadání celosvětových práv ze strany Dilie nenastanou obtíže, připravíme návrh smlouvy a předáme ji Vám a Dilii prostřednictvím našeho úřadu pro autorská práva.*

Jelikož tato cesta zabere jistý čas, prosíme Vás o trochu trpělivosti.

O. Borůvka (23. února 1963): *Souhlasím s tím, že dílo bude vytištěno v ČSSR. Jestli dobře rozumím situaci, bude Vaše nakladatelství jediným mým smluvním partnerem, zatímco s tiskem v ČSSR související (technické) otázky budou řešeny na základě dohody mezi Vaším nakladatelstvím a nakladatelstvím ČSAV (pí. Šimicová).*

DVdW (29. dubna 1963): *... potvrzujeme, že smluvní situace bude skutečně taková, jak ji ve svém dopise předpokládáte. K přípravě návrhu smlouvy bychom rádi měli ještě některé údaje, které dnes už jistě přesněji přehlédnete než před časem. Žádáme Vás tedy o podrobnější obsah, předpokládaný rozsah, počet vyobrazení a termín dodání rukopisu.*

Po dalších dvou urgujících dopisech z německé strany O. Borůvka 1. října 1963 odepisuje a vysvětluje svoji situaci ohledně odevzdání rukopisu a znovu posouvá termín.

... Pilně pracuji na díle o diferenciálních rovnicích, které připravuji pro Vaše nakladatelství. Práce pokračuje, ale často daleko pomaleji než jsem původně předpokládal. Chtěl jsem Vám požadované údaje o svém rukopisu sdělit až po těchto prázdninách, protože jsem odpověď chtěl uzpůsobit pokroku, kterého dosáhnu během prázdnin.

Nyní situace vypadá tak, že dílo bude trochu větší (kvůli četným novým výsledkům), zhruba 10 tiskových archů; vyobrazení – asi 2 jednoduché grafy; termín dodání rukopisu (prosím za prominutí) – zhruba 30. září 1964; název – Transformační teorie obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu; zpracování – podobně jako v mé knize o grupoidech (pečlivé). Kvůli smlouvě (po nejlepších zkušenostech s Vaším nakladatelstvím) si nedělám starosti a prosím Vás, abyste mému příslibu v plné míře důvěřovali.

V dopisech z 6. února 1964 a následně z 15. dubna 1964 nakladatelství DVdW žádá O. Borůvku o sdělení, zda platí termín dodání rukopisu 30. září 1964. Na to O. Borůvka odpovídá dopisem z 6. května 1964:

... Pracuji pilně na díle o diferenciálních transformacích, které připravuji pro Vaše nakladatelství. K tomu se vztahující plán prací jsem ve studijním roce 1963/64 doposud mohl zhruba dodržet. Nyní jsem ale před obdobím zahraničních cest, ve kterém by moje práce mohla být pozdržena. (Zejména budu v červnu o své transformační teorii přednášet ve Stuttgartu, Tübingenu a v Giessenu.) Doufám, že budu moci dodat rukopis nejpozději počátkem roku 1965, bojím se ale, že tlak neměnitelného dodacího termínu by moji práci mohl nepříznivě ovlivnit. Vždyť se jedná

[19] Paní Šimicová zastupovala nakladatelství ČSAV.

o jedinečnou původní monografii ve velmi žádoucí oblasti. O monografii, v níž se uplatňují moje celoživotní zkušenosti v klasické analýze, diferenciální geometrii a moderní algebře. Rozhodujícím pro dokončení rukopisu bude pokrok, kterého budu moci dosáhnout během velkých prázdnin. Neopomenu Vás o tom informovat kolem 30. září 1964.

Německá strana v dopise z 20. července 1964 sděluje, že bude stačit, když počátkem čtvrtého čtvrtletí dá O. Borůvka vědět, jaký termín dodání rukopisu navrhuje. 8. října 1964 O. Borůvka píše

... rukopis je ze tří čtvrtin hotový. Počítejte s dodáním rukopisu asi v průběhu příštího roku 1965.

Následující dopisy nám ale dávají informaci o tom, že ani tento termín ještě nebyl konečný.

DVdW (13. srpna 1965): *... Co se týče Vaší knihy o diferenciálních transformacích byli bychom rádi, kdybychom od Vás obdrželi rukopis do konce září t. r. Jako termín, kdyby dílo mělo vyjít, předpokládáme I. čtvrtletí 1967.*

O. Borůvka (4. října 1965): *... Současný stav rukopisu mé knihy o diferenciálních transformacích je takový, že k jeho dokončení schází ještě zhruba 15 stran. Pak by mělo dojít ještě k zevrubnému projití rukopisu a ke zhotovení opisů. Doufám, že všechny tyto práce uzavřu během asi tří měsíců tak, že budu moci rukopis odeslat asi v lednu 1966. Mohu Vás ujistit, že jde o pečlivou, vyzrálou a zcela původní práci. Rozsah by měl být zhruba tentýž jako u mé knihy o grupoidech a grupách. Přirozeně by mě těšilo, kdyby předpokládaný termín I. čtvrtletí 1967 vydání tohoto díla mohl být zachován. Mám v úmyslu přijet do Berlína na oslavy K. Weierstasse (19. – 23. t. m.) a tak bychom mohli diskutovat o podrobnostech. Je mi líto, že práce na rukopisu nepokračují rychleji, mám ale stále nové povinnosti, které nemohu pominout (mj. jsem byl od počátku roku 1965 požádán o zaslání rukopisů pro oslavné svazky časopisů od pěti redakcí).*

DVdW (3. prosince 1965): *... S termínem dodání rukopisu (leden 1966) souhlasíme a doufáme, že se nám přesto podaří dílo vydat v lednu 1967.*

Při charakteru, který dílo nyní nabylo, se naskýtá otázka, zda je účelné dílo zveřejnit v řadě „Mathematische Forschungsberichte“, kterou vydává pan prof. Dr. Grell jako brožovanou. Snad by bylo účelnější dílo vydat jako monografii v naší řadě „Hochschulbuchreihe“ tak, jako Vaše druhé dílo.

Byli bychom Vám vděčni, kdybyste nám k tomu sdělil svůj názor. Kromě toho Vás prosíme o udání počtu stran rukopisu a počtu obrázků, abychom mohli připravit smlouvu. Jako honorář, když od Vás získáme celosvětová vydavatelská práva, předpokládáme 500,- MDN za tiskový arch. Z toho se přirozeně odečtou daně z honoráře v NDR a u Vás. Výši nákladu stanovíme až po nahlédnutí do rukopisu.

DVdW (21. ledna 1966): *... Při této příležitosti si dovolujeme Vás zdvořile požádat o odpověď na náš dopis z 3. prosince. Vaše údaje potřebujeme k vyhotovení smlouvy... Kromě toho doufáme, že zůstává u Vámi uvedeného termínu pro odevzdání rukopisu (leden 1966).*

O. Borůvka (12. února 1966): *... Práce na rukopisu mého díla Transformační teorie obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu ještě stále nejsou uzavřeny, i když tento cíl sleduji (doslova) ze všech sil. Myslím, že k úplnému dokončení budu potřebovat ještě zhruba dva měsíce. Jistou informaci o (zcela původním) obsahu a rozsahu (zhruba 18 archů) díla Vám může poskytnout přiložený přehled obsahu.*

Jsem zcela srozuměn s tím, že dílo bude zveřejněno ve Vaší řadě „Hochschulbuchreihe“ a chtěl *jsem Vám i sám učinit takový návrh. V rukopisu se vyskytují 4 (tuší vyvedená) vyobrazení. Ve všem ostatním vkládám ve Váš další postup plnou důvěru.*

Německá strana v dopise z 8. března 1966 souhlasí s odevzdáním rukopisu na konci dubna 1966 a navrhuje honorář 500,- MDN. Na to O. Borůvka odpovídá 23. dubna 1966:

... S největší radostí Vám mohu sdělit, že je nyní rukopis mé knihy „Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung" připraven k tisku. Mám v úmyslu tento rukopis v průběhu příštího týdne odevzdat v Dilii. V příloze si Vám dovoluji k Vaší informaci poslat předmluvu ke své knize.

Zdá se mi dost obtížné zaujmout stanovisko k Vašemu návrhu honoráře MDN 500,- (brutto). Myslím, že honorář zhruba MDN 600,- by byl přiměřenější.

Celá tato záležitost je ukončena dnem 21. května 1966, kdy berlínské nakladatelství telegramem potvrzuje převzetí rukopisu. A tak nakonec, po šesti letech zpoždění, byla monografie [16] vydána v roce 1967.

Závěrem srovnejme původní záměr O. Borůvky z roku 1960 s výslednou monografií z roku 1967. Původně měla práce obsahovat jednak výsledky z oblasti diferenciálních rovnic prvního řádu, především o jednoznačnosti řešení rovnice $y' = f(x, y)$ a jednak výsledky transformační teorie diferenciálních rovnic 2. řádu. Postupně byla teorie rozšiřována o nové výsledky z let 1961 – 1966, jako byla teorie fází diferenciálních rovnic 2. řádu (vyjádření řešení pomocí fází, vztahy mezí fází a dispersí, polární funkce, elementární fáze, algebraická struktura fází) a teorie obecných dispersí (lineární zobrazení integrálních prostorů diferenciálních rovnic (q), (Q), normované lineární zobrazení, konstruktivní zavedení obecné disperse a souvislost s úplným řešením Kummerovy rovnice). Množství nových výsledků vedlo O. Borůvku ke změně rozsahu, struktury i názvu zamýšlené publikace. Konečná verze obsahuje pouze výsledky transformační teorie a nese název *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Partie o obecnějších otázkách, které se pojí k Borůvkovým dřívějším výsledkům o jednoznačnosti řešení rovnice $y' = f(x, y)$ z roku 1956 se do této knížky nedostaly.

2 Publikace O. Borůvky týkající se teorie fází, dispersí a transformací

[1] *О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка.* Czech. Math. J. *3* (*78*) (1953), 199–255.

[2] *Замечания к рецензии М. И. Ельшина моей статьи „О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка“*. Czech. Math. J. *6* (*81*) (1956), 431–433.

[3] *Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) *41* (1956), 325–342.

[4] *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine *1* (*49*) (1957), 125–130.

[5] *Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre.* Ann. Mat. Pura Appl., (4) *49* (1960), 229–251.

[6] *Transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. – Décompositions dans les ensembles et théories des groupoïdes*. Algèbre et Théorie des Nombres. Sém. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot 14 (1960/61), Nr. 22, 18 et 17p. (1963).

[7] *Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) *58* (1962), 317–333.

[8] *Über einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Heft 13 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik. Bericht von der Dirichlet-Tagung. Akademie-Verlag, Berlin, 1963, 51–57.

[9] *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale.* Bul. Inst. Politehn. Iaşi, 9 (*13*) (1963), no. 3–4, 11–20.

[10] *Transformation of ordinary second-order linear differential equations*. Differential Equations and their Applications (Proc. Conf. Equadiff I, Prague 1962). Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague; Academic Press, New York, 1963, 27–38.

[11] *Über die algebraische Struktur der Phasenmenge der linearen oszillatorischen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Bericht von der Tagung über geordnete Mengen, Brno, November 1963. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. P., Brno, n°457, 1964, 461–462.

[12] *Sur quelques applications des dispersions centrales dans la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Arch. Math. (Brno), *1* (1965), 1–20.

[13] *Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Ann. Şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, *11B* (1965), 217–238.

[14] *Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) *71* (1966), 165–187.

[15] *Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Vorträge der 3. Tagung über Probleme und Methoden der mathematischen Physik. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1966, Heft 1, 13–27.

[16] *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Hochschulbücher für Mathematik, Band 67. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, xiv+218.

[17] *L'état actuel de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Colloque sur la théorie de l'approximation des fonctions. Cluj, 15. – 20. Septembre, 1967, 1–14.

[18] *Théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Rend. Mat. e Appl., (5) *26* (1967), 187–246.

[19] *Éléments géométriques dans la théorie transformations des équations différentielles linéaires et ordinaires du deuxièmes ordre.* Atti Convegno internaz. Geom. diff. Ist. Geom. Univ. Bologna 1967, 97–108 (1970).

[20] *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung.* Math. Nachr. *38* (1968), H 5/6, 261–266.

[21] *Sur les solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer.* IVème Congrès des mathématiciens d'expression latine et Commémoration de Elie Cartan, Bucuresti-Brasov, 1969. Résumés, 3–4.

[22] *Algebraic elements in the transformation theory of 2nd order linear oscillatory differential equations*. Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica *17* (1967) (Proc. Conf. Equadiff II, Bratislava 1966), 27–36 (1969).

[23] *Geometric elements in the theory of transformations of ordinary second-order linear differential equations.* Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems. Mathematics Institute, University of Warwick, 1968–69, 19–22.

[24] *Sur quelques propriétés de structure du groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., *15* (1970), 1345–1356.

[25] *Linear differential transformations of the second order*. Translated from the German by F. M. Arscott. The English Universities Press, Ltd., London, 1971, xvi+254.

[26] *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle* $Y'' = Q(T)Y$. Commemoration volumes for Prof. Dr. Akitsugu Kawaguchi's seventieth birthday, Vol. III. Tensor (N.S.) *26* (1972), 121–128.

[27] *On central dispersions of the differential equation* $y'' = q(t)y$ *with periodic coefficients*. Ordinary and partial differential equations (Proc. Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1974), Lecture Notes in Math., Vol. 415. Springer – Verlag, Berlin, 1974, 47–61.

[28] *Sur la structure algébrique de la théorie des transformations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica *31* (1975), 59–71.

[29] *Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) *102* (1975), 71–77.

[30] *Sur les blocs des équations différentielles* $Y'' = Q(T)Y$ *aux coefficients périodiques*. Rend. Mat., (6) *8* (1975), 519–532.

[31] *Ueber die Differentialgleichungen* $y'' = q(t)y$ *mit periodischen Abständen der Nullstellen ihrer Integrale*. 5. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1975. Wiss. Schr. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt, Heft 2, 1975, 239–255.

[32] *Contribution à la théorie algébrique des équations* $Y'' = Q(T)Y$. Boll. Un. Mat. Ital., B (5) *13* (1976), 896–915.

[33] *Diferenciální rovnice* $Y'' = Q(T)Y$ *s periodickými koeficienty v souvislosti s teorií dispersí.* Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT v Brně, B-67, 1976, 31–42.

[34] *Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифференциалъные уравнения, Минск, *12* (1976), no. 8, 1347–1383, 1523.

[35] *Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations* $Y'' = Q(t)Y$. Lecture Notes in Mathematics 703 (Proc. Conf. Equadiff IV, Prague 1977). Springer – Verlag, Berlin, 1979, 35–45.

[36] *Sur une classe des groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable*. Ann. Polon. Math. *42* (1983), 25–35.

[37] *Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes*, Applicable Analysis *15* (1983), no. 1–4, 187–200.

[38] *Sur les sous-groupes planaires des groupes des dispersions des équations différentielles lineáires du deuxième ordre*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A *97* (1984), 35–41.

[39] *Sur les blocs des équations différentielles linéaires du deuxième ordre et leurs transformations*. Čas. pěst. mat. fys. 1, *111* (1986), 78–88, 90.

3 Charakteristika publikací

[1] *О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка.* Czech. Math. J. **3** (**78**) (1953), 199–255. (Russian. French summary)

MR **15**,706:

Let $Q(x)$ be continuous and negative for all real x and such that all the non-trivial solutions of the equation (a) $y'' = Q(x)y$ are oscillatory, i.e. have infinitely many zeros with no finite limit point. Let $\cdots < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ be the ordered zeros of an integral $y_0(x)$ of (a). Since $y_0(x)$ is determined, except for a constant factor, by any one of its zeros, $\alpha_n (n = \pm1, \pm2, \dots)$ is uniquely determined by α_0: $\alpha_n = \varphi_n(\alpha_0)$. The author calls $\varphi_n(x)$ the central dispersion (of the first kind) of index n; $\varphi_n(x)$ is monotone increasing and belongs to C_3. The $\varphi_n(x)$ form a cyclic group $\mathfrak{C}$ in the sense that $\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{n+m}(x)$, $\varphi_1(x)$ being the generator, and $\varphi_0(x) = x$ the unit element. The $\varphi_{2n}(x)$ $(n = 0, \pm1, \dots)$ form an invariant subgroup $\mathfrak{S}$ of $\mathfrak{C}$. Let $U(x)$, $V(x)$ and $u(x)$, $v(x)$ be two fundamental systems of solutions of (a). Then a relation **p** is set up between the integrals $Y(x) = aU(x) + bV(x)$ and $y(x) = au(x) + bv(x)$ (a, b any real constants): $y =$**p**Y. This leads to a relation $\alpha = \zeta(A)$ between the zeros A of Y and the zeros α (properly chosen) of y, which the author calls proper dispersion. A proper dispersion $\zeta(x)$ is in C_3 and either monotone increasing („direct“) or decreasing („indirect“). The $\zeta(x)$ form a 3-dimensional group $\mathfrak{G}$ with $\zeta(x) = x$ as identity. The elements of $\mathfrak{G}$ are all the the solutions of the equation of third order (b) $T''/T + \zeta'^2 Q(\zeta) = Q(x)$, $T = |\zeta'|^{-1/2}$. The direct proper dispersions form an invariant subgroup $\mathfrak{P}$ of $\mathfrak{G}$ whose center is $\mathfrak{C}$. The group $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ is isomorphic to the group of real unimodular matrices of order 2. Also considered are dispersions of the second, third and fourth kind referring to the zeros and the extrema of integrals of equation (a).

M. Golomb (Lafayette, Ind.)

Zbl 053.05805

A great number of elementary properties of the oscillatory solutions of an equation $y'' = Q(x)y$ are discussed, such as the distribution of zeros and extreme values.

J. L. Massera

[2] *Замечания к рецензии М. И. Ельшина моей статьи „О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка“.* Czech. Math. J. **6** (**81**) (1956), 431–433. (Russian. French summary)

MR **20** #4053

Reply to the review in RŽ Mat **1956** #406, of the article in same J. **3 (78)** (1953), 199–255 [MR **15**, 706].

Zbl 075.26901

Verf. gibt einige Bemerkungen und Berichtigungen zu dem im Titel genannten Referat von M. I. El'šin (R. Ž. Mat. 1956, Nr. 406) über die Arbeit des Verf. [Czechosl. math. J. **3** (**78**), 199–255 (1953, dies. Zbl. **53**, 58)].

[3] *Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **41** (1956), 325–342. (French)

MR **20** #1814:

Given a function $X(t)$ with a non-vanishing derivative X', define $\{X,t\} = \frac{1}{2}\frac{X'''}{X'} - \frac{3}{4}\frac{X''^2}{X'^2}$; similarly for functions of T, the derivatives being indicated by dots. Let q, Q be two continuous functions and consider equations (b): $-\{X,t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$, (B): $-\{x,T\} + q(x)\dot{x}^2 = Q(T)$, (b'): $-\{X,t\} + q(X)X'^2 = q(t)$, (B'): $-\{x,T\} + Q(x)\dot{x}^2 = Q(T)$. The following results are typical: 1. If X is an integral of (b) its inverse function is an integral of (B); 2. If X, y, $\overline{X}$, $\overline{y}$ are integrals of (b), (B), (b'), (B'), respectively, the composite functions $X\overline{X}$, $\overline{y}X$, $y\overline{y}$, $\overline{X}y$, yX, Xy are solutions of (b), (b), (B), (B), (b'), (B'), respectively; 3. Let X be an integral of (b) and U an integral of (A): $Y'' = Q(T)Y$; then (13): $u = U(X)X'^{-1/2}$ is an integral of (a): $\ddot{y} = q(t)y$; and conversely (with certain restrictions which we do not reproduce explicitly) if u, U are integrals of (a), (A), there is an integral X of (b) such that (13) holds.

J. L. Massera (Zbl **72**, 89)

Zbl 072.08902

Stejné jako v MR.

[4] *Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine **1** (**49**) (1957), 125–130. (French)

MR **21** #3608

Es handelt sich um folgendes noch von Kummer herrührendes Problem: Wenn zwei Differentialgleichungen von sog. Jacobischem Typus (1) $y'' = q(t)y$; (2) $Y'' = Q(T)Y$ und ein Integral $U(T)$ der Gleichung (2) gegeben sind, wobei q und Q kontinuierliche Funktionen sind, zwei Funktionen $w(t)$ und $X(t)$ derart zu finden, dass $u(t) = w(t) \cdot U[X(t)]$ ein Integral der Gleichung (2) wird. Zu dem Zweck entwickelt der Verf. eine Theorie der linearen Differentialtransformationen von zweiter Ordnung, die aus einem analytischen und einem sog. konstruktiven Teil besteht. In der vorliegenden Arbeit wird der analytische Teil ganz kurz gestreift, da er ausführlich vom Verf. früher veröffentlicht wurde [Ann. Mat. Pura Appl. (4) **41** (1956), 325–342; MR **20** #1814], während der konstruktive Teil etwas vollständiger behandelt wird.

T. P. Anđelić (Belgrade)

Zbl 082.07501

Let (a): $y'' = q(t)y$, (A): $Y'' = Q(T)Y$, (b): $-\{X,t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$, where q, Q are continuous functions in open intervals j, J and $\{X,t\} = X'''(2X')^{-1} - 3X''^2(2X')^{-2}$ is the Schwartzian derivative; assume that the integrals of (a), (A) are oscillatory (i.e., have infinitely many roots) at both ends of both intervals j, J. Given $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ and two integrals y, Y of (a), (A) which are both zero or both different from zero at t_0, X_0, respectively, a direct (indirect) correspondence between the roots of y, Y is established by associated roots with equal ordinal numbers counted from t_0, X_0 in the same (opposite) direction. Let σ, Σ be the families of all solutions of (a), (A) and $p : \sigma \to \Sigma$ any isomorphism; if u, $v \in \sigma$ are linearly independent, the characteristic of p is the sign of the quotient of the two Wronskian determinants of u, v and pu, pv; p is regular if $y \in \sigma$, $y(t_0) = 0$ implies $(py)(X_0) = 0$. Let p be a regular isomorphism, $t \in j$, $y \in \sigma$, $y(t) = 0$; the direct (indirect) dispersions $D(\overline{D})$ are defined as functions of t by: $D(t)$ ($\overline{D}(t)$) is equal to the root of py associated to t in the direct (indirect) correspondence. The following theorem is stated: the solutions of (b) exist in

j and they are the direct dispersions corresponding to the different regular isomorphisms with positive characteristic and the indirect dispersions of the regular isomorphisms with negative characteristic; the former represent all the increasing, the latter all the decreasing solutions. Indications of other related results are also given.

J. L. Massera

[5] *Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre.* Ann. Mat. Pura Appl., (4) **49** (1960), 229–251. (French)

MR **22** #5771 The results of a previous paper [same Ann. (4) **41** (1956), 325–342; MR **20** #1814] are only of a local character, i.e., the solutions of (b) exist (and hence the transformation (13) applies) only in intervals which are smaller than the intervals j, J of definition of (a), (A). A solution of (b) is called complete if it is defined on j and its values cover J; the corresponding transformation is also called complete. The present work is devoted to the investigation of the existence of complete solutions. The decisive condition is that (a), (A) have the same type m (supposed to be finite and ≥ 2), the type being the maximum number of zeros of the solutions in the interval of definition, and are both simultaneously special or non-special, an equation (a) being special if inf $\{t \in j; t$ has a conjugate in j which is $< t\}$ is conjugate to sup $\{t \in j; t$ has a conjugate in j which is $> t\}$. A detailed description of the results would be too lengthy to be reproduced here.

J. L. Massera (Montevideo)

Zbl 095.28603

Stejné jako v MR.

[6] *Transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. – Décompositions dans les ensembles et théories des groupoïdes*. Algèbre et Théorie des Nombres. Sém. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot 14 (1960/61), Nr. 22, 18 et 17p. (1963).

Zbl 121.07103

Verf. gibt einen Überblick über die Hauptdefinitionen und Hauptergebnisse der Theorie der Transformation der Lösungen der Differentialgleichung (a) $y'' = q(t)y$, $t \in j$, in die Lösungen der Gleichung (b) $Y'' = Q(T)Y$, $T \in J$. Diese Transformation ist durch die Formel $y(t) = (|X'(t)|)^{-1/2}Y(X(t))$ gegeben. Dabei ist $X(t)$ eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (c) $-\{X, t\} + Q(x)X'^2 = q(t)$, wo $\{X, t\}$ die sogenannte Schwarzsche Ableitung bedeutet. Es zeigte sich daß der Begriff des Typus einer Differentialgleichung in dieser Transformation eine wichtige Rolle spielt. Die Gleichung (a) ist vom Typus m, wenn es eine Lösung von (a) gibt, welche auf j m Nullstellen hat, aber keine Lösung von (a) mehr als m Nullstellen besitzt. Hat irgendeine Lösung von (a) auf j unendlich viele Nullstellen, so ist (a) vom unendlichen Typus. Hinreichende und notwendige Bedingungen wurden dafür abgeleitet, daß (a) vom Typus m ist. Weitere Grundbegriffe, wie eine Basis von (a), d. h. ein geordnetes Paar (u, v) von linear unabhängigen Lösungen von (a), die Phase α und die Amplitude ϱ, die durch die Formeln: $\operatorname{tg}\alpha = u(t)/v(t)$, $\varrho = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ definiert sind, haben sich als sehr fruchtbar in der Theorie der Transformation erwiesen. Mit Hilfe dieser wurde zum Beispiel die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (c) gelöst. Es wurden weiter die entsprechenden Intervalle $i \subset j$, $I \subset J$ abgeleitet, auf welchen sich die Transformation abspielt. Die Transformation heißt komplett, wenn $i = j$, $I = J$ ist. Notwendige und hinreichende

Bedingungen für eine solche komplette Transformation werden angegeben. Verf. beschäftigt sich weiter mit den speziellen Lösungen von (c), den sogenannten Zentraldispersionen. Es sei t eine beliebige Zahl aus j und es sei $u(v)$ die Lösung von (a), welche in t (deren Ableitung in t) eine Nullstelle hat. Dann ist $\varphi_n(t)$ ($\psi_n(t)$, $\chi_n(t)$, $\omega_n(t)$) die n-te nach t liegende Nullstelle von u (v', u', v). Die Funktion $\varphi_n(t)$ ($\psi_n(t)$, $\chi_n(t)$, $\omega_n(t)$) heißt die n-te Zentraldispersion erster (zweiter, dritter, vierter) Gattung. Die Zentraldispersionen sind die Lösungen von (c). Man kann eine ausführliche Analysis der Zentraldispersionen durchführen. Einige ihrer Eigenschaften sind hier angegeben. Zum Schluß führt Verf. einige Probleme an, die mittels der Theorie der Transformation schon gelöst wurden.

M. Švec

[7] *Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **58** (1962), 317–333. (French)

MR **26** #3981

Further results on the subject studied in previous papers by the author [same Ann. (4) **41** (1956), 325–342; MR **20** #1814; ibid. **49** (1960), 229–251; MR **22** #5771]. It is shown, for instance, that the complete solutions in the nonspecial case may be split into two families, each of which admits an ordering which makes them order-isomorphic to the set of real numbers. In the special case the situation is more involved since each one of the two families depends on two parameters. Other properties of these families are too complicated to be summarized here.

J. L. Massera (Montevideo)

Zbl 111.28001

Dans un Mémoire antérieur (ce Zbl. **95**, 286) l'A. a étudié l'existence et la généralité de ces transformations. Dans celui-ci il introduit la théorie de façon plus directe et il étudie les propriétés de ces transformations moyennant les solutions d'une certaine équation différentielle non-linéaire de troisième ordre.

A. de Castro

[8] *Über einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Heft 13 der Schriftenreihe der Institute für Mathematik. Bericht von der Dirichlet-Tagung. Akademie-Verlag, Berlin, 1963, 51–57. (German)

MR **31** #429

An expository lecture presented in 1959.

Zbl 114.28803

Bericht über einige Ergebnisse aus der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung [s. a. Verf., dies. Zbl. **72**, 89; **82**, 75; **95**, 286; sowie M. Laitoch, Czechosl. Math. J. **6** (**81**), 265–380 (1956); J. Chrastina, Časopis Mat. **87**, 188–197 (1962)].

[9] *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale.* Bul. Inst. Politehn. Iaşi, 9 (**13**) (1963), no. 3–4, 11–20. (French. Russian, Romanian summary)

MR **31** #3655

Consider an equation (1) $y'' = q(t)y$ which is oscillatory for $t \to \pm\infty$, and for any real t, let $\varphi(t)$ be the first right conjugate point of t. The function φ is called the fundamental dispersion of the equation (1). It is shown that the set of all equations with the same fundamental dispersion has the power of the continuum.

W. A. Coppel (Canberra)

Zbl 138.32403

Let (q): $y'' = q(t)y$ be a given linear differential equation of second order where $q \in C_0(-\infty, \infty)$. Let each solution of (q) have infinitely many zeros both to the left and to the right of an arbitrary number. The basic central dispersion $\varphi(t)$ of (q) is defined as follows: Let $u(t)$ be a non-trivial solution of (q) which vanishes at t_0; then $\varphi(t_0)$ is the first zero of $u(t)$ lying on the right of t_0. The following result is proved: The power of the set of all equations (q) with the same basic central dispersion $\varphi(t)$ does not depend on $\varphi(t)$ and it is equal to the power of the continuum. To this aim the theory of so called phases of (q) was developed. Let u, v be two independent solutions of (q). Then a phase of (q) is a continuous solution of $\operatorname{tg}\alpha(t) = u(t)/v(t)$, $v(t) \neq 0$, for $t \in (-\infty, \infty)$. For example, there is proved: The set of all phases of all (q) forms a group and the set of so-called elementary phases [i. e. phases $\alpha(t)$ satisfying the relation $\alpha(t+\pi) = \alpha(t) + \pi \operatorname{sign} \alpha'$] is its subgroup. The formula is also derived establishing all (q) with the same given basic central dispersion:

$$q = q_\alpha + (f''\alpha + 2f'\alpha \operatorname{cotg}\alpha)\alpha'^2,$$

where $f \in C_2$ is a periodic function with period π and such that $f(0) = f'(0) = 0$, $\int_0^\pi \frac{e^{-2f(\sigma)}}{\sin^2\sigma} d\sigma = 0$, α is given phase and q_α is the coefficient of (q) with the phase α.

M. Greguš

[10] *Transformation of ordinary second-order linear differential equations*. Differential Equations and their Applications (Proc. Conf. Equadiff I, Prague 1962). Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague; Academic Press, New York, 1963, 27–38. (English)

MR **30** #295

This paper is concerned with conditions under which the equations $y'' + q(t)y = 0$, $\ddot{Y} + Q(T)Y = 0$ can be transformed into one another by a change of variables $y = w(t)Y$, $T = X(t)$. The problem was solved formally by Kummer in the last century. The author outlines a rigorous treatment for the real domain and refers to previous papers for applications.

W. A. Coppel (Canberra)

Zbl 138.32402

Der Verf. behandelt das Kummersche Problem: Von zwei linearen Differentialgleichungen II. Ordnung $y'' + q(t)y = 0$, $\ddot{Y} + Q(T)Y = 0$ ist die Lösung einer Gleichung bekannt. Wie kann die Lösung der einen Differentialgleichung durch die der anderen ausgedrückt werden? Dieses Problem führt auf die Schwarzsche Differentialgleichung, einer nichtlinearen Differentialgleichung III. Ordnung. Die Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösungen wird mit topologischen Methoden untersucht, die auch qualitative Aussagen über den Zusammenhang zwischen Differentialgleichung und ihren Lösungen ermöglichen.

H.-J. Bangen

[11] *Über die algebraische Struktur der Phasenmenge der linearen oszillatorischen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Bericht von der Tagung über geordnete Mengen, Brno, November 1963. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. P., Brno, n°457, 1964, 461–462.

Tato práce nebyla recenzována ani v MR ani v Zbl. Jedná se o přednášku o algebraické struktuře množiny fází oscilatorických lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu, kterou O. Borůvka proslovil na konferenci o uspořádaných množinách, jež se konala 4. – 7. prosince 1963 v Brně.

[12] *Sur quelques applications des dispersions centrales dans la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Arch. Math. (Brno), **1** (1965), 1–20. (French)

MR **33** #5984

The second-order equation $y'' = q(t)y$ is said to be oscillatory on the interval (a, b) if its solutions have an infinite sequence of zeros as $t \to a$ and as $t \to b$. If $y(t)$ is a solution and x is not a zero of $y(t)$, then $\overline{y}(t) = y(t) \int_x^t [y^2(\sigma)]^{-1} d\sigma$ is also a solution on an interval about x not containing any zeros of $y(t)$. The author shows how to extend this solution to the whole interval (a, b). He also studies the properties of equations with the same fundamental dispersion (i.e., whose solutions have the same zeros) as the given equation.

F. Brauer (Madison, Wis.)

Zbl 151.10804

The author considers the following differential equation $y'' = q(t)y$, where $q(t)$ is a continuous function in the interval (a, b), which may be infinite. Two independent solutions of this differential equation denoted by u and v are supposed to posses an infinite number of zeroes. In this paper are considered the phases $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$. The author regards the solution $y(t) \int_x^t \frac{d\sigma}{y^2(\sigma)}$ in the interval $(-\infty, \infty)$ and gives some properties concerning the asymptotic behaviour of the solutions and zeroes. The importance of the central dispersion in the theory of the above mentioned differential equation is stressed and considered in details.

T. Tietz

[13] *Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Ann. Şti. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, **11B** (1965), 217–238. (German. Romanian, Russian summary)

MR **34** #1595

Another exposition of the transformation theory of second-order linear differential equations and the author's theory of dispersions [cf. the author, *Differential equations and their applications* (Proc. Conf., Prague, 1962), pp. 27–38, Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 1963; MR **30** #295].

W. A. Coppel (Canberra)

Zbl 173.34003

Consider oscillatoric differential equations (q): $y'' = q(t)y$ and (Q): $\ddot{Y} = Q(T)Y$, where $q(t)$, $Q(T)$ are continuous functions on $(-\infty, \infty)$. Let (u, v) and (U, V) be two linearly independent solutions of (q) and (Q), resp. A phase $\alpha(t)$ and $A(T)$ with respect to (u, v) and (U, V) is defined as a continuous function on $(-\infty, \infty)$ satisfying $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$ and $\operatorname{tg} A(t) = U(T)/V(T)$, resp. Let p be a mapping of the set of all solutions of (q) into the set of all solutions of (Q) defined in the following way: if $y = \lambda u + \mu v$ then $p(y) = \lambda U + \mu V$. The characteristic χp of p is number $(uv' - u'v)/(U\dot{V} - \dot{U}V)$. Let t_0, T_0 be arbitrary numbers, (u, v) be a pair of independent solutions of (q). There exist λ, μ such that $y(t) = \lambda u + \mu v$ has a zero at t_0. Choose (U, V) such that $Y(T) = \lambda U + \mu V$ has a zero at T_0. A mapping p defined by means of these pairs (u, v) and (U, V) is called normed mapping with respect to t_0, T_0. If, moreover, phases α and A are chosen (which is always possible) such that $\alpha(t_0) = A(T_0) = 0$, then α, A are called canonical with respect to t_0, T_0 and p. Let $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots$ and $\dots < T_{-1} < T_0 < T_1 < \dots$ be all zeros of a solution y of (q) and of a solution Y of (Q), resp. Let p be a normed mapping with respect to t_0, T_0. Now, let $t^\star \in (-\infty, \infty)$ be a number and y be such a solution of (q) that $y(t^\star) = 0$. Let $t^\star \in < t_\nu, t_{\nu+1})$ and $T^\star$ be the zero of $Y = p(y)$ lying in $< T_\nu, T_{\nu+1})$ if $\chi p > 0$ or in $(T_{-\nu-1}, T_{-\nu} >$ if $\chi p < 0$. Then $T^\star = X(t^\star)$ is a general dispersion of (q), (Q) (in this order) with respect to t_0, T_0 and p. – Some results: „Let $X(t)$ be a general dispersion with respect to t_0, T_0 and p. If α, A are canonical with respect to t_0, T_0 and p, then $\alpha(t) = A(X(t))$ on $(-\infty, \infty)$". Further, all solutions of Kummer's equation (Q, q): $-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$, where $\{X, t\}$ is Schwarz's derivative $\frac{1}{2}X'''/X' - \frac{3}{4}X''^2/X'^2$, are constructed: „All solutions of (Q, q) defined on $(-\infty, \infty)$ are exactly all general dispersions of (q), (Q)." Algebraic structure of general dispersions is deeply studied as well.

F. Neuman

[14] *Sur une application géométrique des dispersions centrales des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **71** (1966), 165–187. (French)

MR **34** #6647

Given a collection of straight lines, the author studies the plane curves such that (i) each straight line of the collection cuts the curve in at least two points, and (ii) the tangents to the curves at each intersection are parallel. He characterizes such curves, using global properties of second-order linear differential equations.

F. Brauer (Madison, Wis.)

Zbl 148.06001

„Sont étudiées les courbes planes caractérisées par la propriété d'être coupées par toute droite d'un faisceau de droites en au moins deux points et de telle façon que les tangentes de la courbe, dans les différents points d'intersection, sont mutuellement paralléles. L'étude est basée sur les notions empruntées de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre. Il s'agit des matières dans le domaine réel et de caractère global." (Authors's summary.)

A. M. Krall

[15] *Neuere Ergebnisse in der Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Vorträge der 3. Tagung über Probleme und Methoden der mathematischen Physik. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1966, Heft 1, 13–27.

Zbl 161.05804

This paper is a review one. The author states some results of his own and some of his disciples for the equation $(\star)$ $y'' = q(t)y$ with a continuous function $q(t)$ in an open interval. Firstly results are given concerning oscillatory equations $(\star)$ with the same zeroes of solutions in $(-\infty, \infty)$. These results concern the power of the set of such equations (it is equal to C), connection between functions $q(t)$ of these equations and properties of their solutions. Then the theory of transformation of $(\star)$ equations and its physical application is considered.

E. J. Grudo

[16] *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*. Hochschulbücher für Mathematik, Band 67. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, xiv+218. (German)

MR **38** #4743

This book gives a connected account of work of the past twenty years by the author and other Czechoslovak mathematicians on the transformation theory of second-order linear differential equations.

Contents: (I) Grundlagen der Theorie: (A) Allgemeine Eigenschaften der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung; (B) Phasentheorie der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung; (II) Dispersionstheorie: (A) Theorie der Zentraldispersionen; (B) Spezielle Probleme über Zentraldispersion; (C) Theorie der allgemeinen dispersionen; (III) Allgemeine Transformationstheorie: (A) Allgemeine Transformationen; (B) Vollständige Transformationen.

Zbl 153.11201

Es handelt sich um eine Transformationstheorie für gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung im Reellen, bei der man untersucht, wie sich Variablentransformationen und damit zusammenhängende Vorgänge auf Lösungen auswirken, also um Fragen, die zuerst von E. E. Kummer (1834) und dann später von Laguerre, Brioschi, Halphen, Forsyth, Lie und anderen behandelt wurden. Die vorliegende Gestalt verdankt die Theorie neueren Arbeiten von E. Barvínek, Verf., M. Greguš, Z. Hustý, M. Laitoch, F. Neuman, M. Ráb, V. Šeda und anderen. Diese Theorie ist qualitativ und global und stützt sich wesentlich auf neue Begriffe. Sie hat 2 Teile: 1. Die „Dispersionstheorie" betrifft oszillatorische Differentialgleichungen. Sie beruht auf dem Begriff der Zentraldispersion und umfaßt eine konstruktive Integrationstheorie der Kummerschen Differentialgleichungen. 2. Die „allgemeine Transformationstheorie" untersucht Eigenschaften von Lösungen der Kummerschen Differentialgleichung im Zusammenhang mit Transformationen bei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Demgemäß gliedert sich das Buch, wie folgt: I. Grundlagen: A. Allgemeine Eigenschaften gewöhnlicher homogener linearer Differentialgleichen 2. Ordnung (u. a. Eigenschaften von Integralen, konjugierte Zahlen, zentroaffine Eigenschaften ebener Kurven). B. Phasentheorie der genannten Gleichungen (Polarkoordinaten der Basen, Polarfunktionen, lokale und Randeigenschaften der Phasen, algebraische Struktur der Phasenmenge oszillatorischer Differentialgleichungen usw., also die methodische Grundlage der zu entwickelnden Transformationstheorie). II. Dispersionstheorie: A. Zentraldispersionen (Z. D.) B. Spezielle Probleme (z. B. Differentialgleichungen mit denselben Z. D. 1. Art, mit zusammenfallenden Z. D. k-ter und $(k + 1)$-ter Art, usw.). C. Allgemeine Dispersionen (unter Zugrundelegung zweier oszillatorischer Differentialgleichungen (q) $y'' = q(t)y$, $a < t < b$, und (Q) $\ddot{Y} = Q(T)Y$, $A < T < B$. III. Allgemeine Transformationstheorie: A. Allgemeine Transformationen (Transformationseigenschaften der Lösungen der von Kummer angegebenen nichtlinearen Differentialgleichung (Qq) dritter Ordnung für die Transformierende der Differentialgleichungen (q), (Q)m, sowie Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bei (Qq), physikalische Anwendungen auf geradlinige und harmonische Bewegungen). B. Vollständige Transformationen (Existenz und Allgemeinheit der vollständigen Transformationen, Struktur der Menge vollständiger Lösungen von (Qq)). Die Darstellung ist klar und leicht lesbar und erfordert keine besonderen Vorkenntnisse. Auf historische Zusammenhänge und geometrische Motivierungen wird Wert gelegt. Alles in allem hat man damit eine abgerundete und wohlausgewogene Neuerscheinung, die sehr begrüßenswert ist.

E. Kreyszig

[17] *L'état actuel de la théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Colloque sur la théorie de l'approximation des fonctions. Cluj, 15. – 20. Septembre, 1967, 1–14.

Tato práce nebyla recenzována v MR ani v Zbl. Jedná se o stručný přehled nejdůležitějších výsledků celé transformační teorie: Zavedení první a druhé fáze, Kummerův transformační problém, teorie centrálních dispersí (zavedení, základní vlastnosti, derivace dispersí, souvislost transformační teorie a centrálních dispersí), obecné disperse a algebraická struktura fází. Je zde uvedeno, že jde o hlavní výsledky zpracované v monografii [16], která byla v té době v tisku.

[18] *Théorie des transformations des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Rend. Mat. e Appl., (5) **26** (1967), 187–246. (French)

MR **37** #5453

This is an expository paper containing the text of four invited lectures delivered at the University of Rome in April, 1967, concerning the author's theory of transformations of differential equations of the form $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. This material has been reviewed previously [the author, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumaine **1** (**49**) (1957), 125–130; MR **21** #3608; Ann. Mat. Pura Appl. (4) **49** (1960), 229–251; MR **22** #5771; ibid. (4) **58** (1962), 317–333; MR **26** #3981; *Differential equations and their applications* (Proc. Conf., Prague, 1962), pp. 27–38, Publ. House Czechoslovak Akad. Sci., Prague, 1963; MR **30** #295; Bul. Inst. Politehn. Iaşi (N. S.) **9 (13)** (1963), no. 3–4, 11–20; MR **31** #3655; Arch. Math. (Brno) **1** (1965), 1–20; MR **33** #5984; An. Şti. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N. S.) **11B** (1965), 217–238; MR **34** #1595; Ann. Mat. Pura Appl. (4) **71** (1966), 165–187; MR **34** #6647].

C. A. Swanson (Vancouver, B.C.)

Zbl 165.10002

Die vorliegende Arbeit enthält den Wortlaut von vier Vorträgen, die der Verf. über seine Transformationstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung im Seminar des Herrn Prof. G. Fichera an der Universität in Rom gehalten hatte (April 1967). Diese Theorie ist inzwischen in ausführlicher monographischer Bearbeitung in Buchform erschienen [vgl. Verf., Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; dies. Zbl. **153**, 112)]. Die Arbeit bringt eine Übersicht über die Struktur und den Inhalt der erwähnten Theorie, wobei namentlich die neuartigen methodisch und sachlich wichtigsten Elemente dieser letzteren hervorgehoben werden. Dies betrifft insbesondere den Begriff von verschiedenen Arten von Dispersionen, die sogenannten vollständigen Transformationen, sowie die algebraischen auf gruppentheoretische Sätze gestützten Methoden, die bei Untersuchungen der Transformationsprozesse im oszillatorischen Fall tiefliegende Resultate ergeben. Ferner findet man in der Arbeit in kurzgefaßter Form die Lösung von einigen Problemen analytischer und geometrischer Natur, die die Tragweite der erwähnten Transformationstheorie beleuchten.

Autorreferat.

[19] *Éléments géométriques dans la théorie transformations des équations différentielles linéaires et ordinaires du deuxièmes ordre.* Atti Convegno internaz. Geom. diff. Ist. Geom. Univ. Bologna 1967, 97–108 (1970).

Zbl 243.34050

[This article was published in the book announced in this Zbl. 226.00013.] The author gives a short geometric introduction to the theory developed in his book „Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung" (1967; this Zbl. **153**, 112). The theory concerns conjugate and focal points (the latter both in the sense of the calculus of variations and in the sense adopted by most ungeometric writers in the theory of ODE) of linear second order differential equations. Major tools discussed are (a) the Kummer transform and (b) centro-affine differential geometry of curves $x(t)$ that satisfy the equation, in particular Radon curves. The analyst should be aware of the following dictionary: Central dispersion of first kind = conjugate point, of second kind = conjugate point of the derivative of a solution of the DE, of third kind = focal point in the unhistoric sense of the word, of fourth kind = focal point in the sense of M. Morse.

H. Guggenheimer

[20] *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung*. Math. Nachr. **38** (1968), H 5/6, 261–266. (German)

MR **39** #5854

The equations under discussion are (q) $y'' - q(t)y = 0$, (Q) $Y'' - Q(t)Y = 0$ and (Qq) $-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$, where $\{X, t\}$ denotes the Schwarzian derivative. (q) and (Q) are related by $y(t) = |X'(t)|^{-1/2} Y[X(t)]$. With equation (q) one can associate a phase function $\alpha(t)$, defined by tan $\alpha(t) = y_1/y_2$, where y_1 and y_2 are linearly independent solutions of (q). If (q) is of oscillatory type, then $\alpha(t)$ increases monotonically from $-\infty$ to $+\infty$. The set of all phase functions forms a group under the operation of composition of functions. The identity $\alpha(t) = t$ is associated with the equation (-1). One can define a linear mapping between the solution spaces of (q) and (Q). To each such mapping p one can assign a function $X(t)$, namely, the general dispersion. If y satisfies (q) and vanishes at t, then py satisfies (Q) and vanishes at $X(t)$, and $X(t)$ satisfies (Qq). (For more details on these concepts, see the author's book [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743].) The set of all general dispersions associated with (Qq) is denoted by $I(Qq)$. The author proves, using substantially grouptheoretic arguments, that a phase-function ξ is a general dispersion of (Qq) if and only if $\xi^{-1} I(QQ)\xi = I(qq)$.

H. Hochstadt (Brooklyn, N. Y.)

Zbl 193.04301

In the theory of transformations of linear differential equations of the 2nd order (Q) $Y'' = Q(T)Y$, (q) $y'' = q(t)y$, the central place is assumed by Kummer's differential equation (Qq) $-\{X, t\} + Q(X)X'^2 = q(t)$, $\{X, t\} = (1/2)(X'''/X') - (3/4)(X''^2/X'^2)$,whose solutions X transform every integral Y of the equation (Q) into a certain integral y of the equation (q) in the sense of the formula: $Y[X(t)]/\sqrt{|X'(t)|} = y(t)$. In case of the definition interval of the equations (Q), (q) being $(-\infty, \infty)$ and these equations being oscillatory, the set $I(Q, q)$ of all solutions of the equation (Qq) is just formed of the so-called general dispersion of this equation, which may be constructively described. In addition to it, $I(Q, q)$ is known to be a subset in the group of phases $\mathfrak{G}$ of linear differential equations of the 2nd order and is given by the formula $I(Q, q) = A^{-1}\mathfrak{C}\alpha$, where A, α denote arbitrarily chosen (first) phases of the equations (Q), (q) respectively and $\mathfrak{C}$ denotes the fundamental subgroup in $\mathfrak{G}$, i. e. $\mathfrak{C}= I(-1, q)$. For details, see author: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; this Zbl. **153**, 112). In the paper an algebraic characterization of the set $I(Q, q)$ is studied. The article consists of three parts: In the first part a certain theorem on conjugated subgroups of an abstract group is proved: Let G be an (abstract) group, E $(\subset G)$ its subgroup and N the normalizator of this subgroup in G. Further let A, $a \in G$ be arbitrary elements and $g_a = a^{-1}Ea$, $g_A = A^{-1}EA$ conjugated subgroups with E with respect to a, A. Finally let $G/_l\, g_a$ and $G/_r\, g_A$ denote the left and the right decompositions of the group G with respect to the subgroup g_a and g_A, respectively. Then N coincides with E if and only if the set $A^{-1}Ea$ is the only common element of both the decompositions $G/_l\, g_a$, $G/_r\, g_A$. In the second part is proved that the supposition of this theorem is fulfilled in the case of the group of phases $\mathfrak{G}$ and its fundamental subgroup $\mathfrak{C}{:}\mathfrak{N}{=}\mathfrak{C}$, where $\mathfrak{N}$ is the normalizator of $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$. In the third part the above mentioned theorem is realized by the general dispersions of the equation (Qq). The result is the following characterization of the general dispersions of the equation (Qq): $\xi \in I(Q,q) \Leftrightarrow \xi^{-1}I(Q,Q)\xi = I(q,q)$.

F. Neuman

[21] *Sur les solutions simultanées de deux équations différentielles de Kummer.* IVème Congrès des mathématiciens d'expression latine et Commémoration de Elie Cartan, Bucuresti-Brasov, 1969. Résumés, 3–4.

Tato práce nebyla recenzována v MR ani v Zbl. Jedná se o resumé přednášky proslovené na 4. kongresu matematiků, jenž se konal ve dnech 17. – 24. září 1969.

Přednáška byla věnována otázce, za jakých podmínek mají dvě různé Kummerovy rovnice oscilatorického typu stejné řešení. K řešení této problematiky je využit algebraický přístup k teorii transformací.

[22] *Algebraic elements in the transformation theory of 2nd order linear oscillatory differential equations.* Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica **17** (1967) (Proc. Conf. Equadiff II, Bratislava 1966), 27–36 (1969).

Zbl 218.34005

A survey article dealing with the algebraic aspects of the theory developed in the author's book [Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; this Zbl. **153**, 112)].

H. Guggenheimer

[23] *Geometric elements in the theory of transformations of ordinary second-order linear differential equations.* Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems. Mathematics Institute, University of Warwick, 1968–69, 19–22.

Tato práce nebyla recenzována v MR ani v Zbl. Jedná se o sborník příspěvků proslovených v seminářích, které se konaly v Matematickém Institutu University Warwick v období od 1. září 1968 do 30. června 1969. O. Borůvka zde proslovil přednášku s výše uvedeným názvem. Zavedl pojmy fáze, centrální disperse, transformace a naznačil geometrický význam centrálních dispersí. Odkazuje se přitom na monografii [16] a na práci H. Guggenheimer, *Some geometric remarks about dispersions* (Arch. Math. (Brno), 4 (1968), 193–199).

[24] *Sur quelques propriétés de structure du groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxième ordre*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **15** (1970), 1345–1356. (French)

MR **43** #6502

In this paper the author investigates some properties of certain groups that arise in the qualitive study of oscillatory differential equations of the form (q) $y'' + qy = 0$, $q \in C(-\infty,\infty)$. The first part of the paper is devoted to the proof of theorems and statement of terminology necessary for the second part. In particular there are results pertaining to the transformation of one subgroup Z_a of a group G into another subgroup Z_b of G. In the second part the following terminology is introduced. By a (first) phase of equation (q) one understands all functions $\alpha(t) \in C(-\infty,\infty)$, satisfying (with the exception of the zeros of the function v) the relation $\tan\alpha(t) = u(t)/v(t)$, where u, v are a linearly independent set of solutions of (q). The basic group of concern to the author is the group of phases G, defined as the group of all function phases that are equivalent to (first) phases and defined as all functions $\alpha(t) \in C(-\infty,\infty)$ with $\alpha'(t) \neq 0$, $\lim_{t\to\pm\infty}\alpha(t) = \pm\infty(\operatorname{sgn}\alpha')$ with group multiplication given by composition of functions. The identity of the group is t. Then there are ten results given, involving this group, its subgroups, and associated group theoretic concepts. A typical result is following: if $c(t) = (t+\pi)c_\nu$ ($\nu = 0, \pm1, \dots$) is the composition of c with itself ν times, $Z = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, t, c_1, c_2, \dots)$ and

$$Z_m = (\dots, c_{-2m}, c_{-m}, t, c_m, c_{2m}, \dots)$$

then all function phases that transform the subgroup Z_m to Z_n are precisely the phases of equation (q) with q defined by

$$q(t) = -\frac{1}{2}\frac{G_n'''(t)}{(\varepsilon + G_n'(t))} + \frac{3}{4}\frac{G_n''^2(t)}{(\varepsilon + G_n'(t))^2} - \frac{m^2}{n^2}(\varepsilon + G_n'(t))^2,$$

ε being ±1, and $G_n(t)$ a function $\in C^3(-\infty,\infty)$ that is periodic of period $n\pi$ and such that $\operatorname{sgn}(\varepsilon + G_n'(t)) = \varepsilon$. The author's book *Lineare Differential-Transformationen 2. Ordnung*, VEB Deutsch. Verlag der Wissensch., Berlin, 1967 [MR **38** #4743], will be of help as a reference during a first reading of the paper.

H. C. Howard (Lexington, Ky.)

Zbl 216.10901

„Dans le groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, G, le centre du sous-groupe formé par les phases-éléments du sous-groupe fondamental qui sont croissantes est un groupe monogène. On étudie les propriétés de structure du groupe G en relation avec le centre en question.“ (Résumé de l'A.)

A. de Castro

[25] *Linear differential transformations of the second order*. Translated from the German by F. M. Arscott. The English Universities Press, Ltd., London, 1971, xvi+254. (English)

MR **57** #3484

The original has been reviewed [Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743]. The author has written two additional chapters for this translation, dealing with (i) an abstract algebraic model for the transformation theory of Jacobian oscillatory differential equations, and (ii) a survey of recent results in transformation theory.

The translator has appended a glossary of English equivalents for certain German technical terms.

Zbl 222.34002

Vgl. die Besprechung des deutschen Originals in diesem Zbl. **153**, 112.

[26] *Sur la périodicité de la distance des zéros des intégrales de l'équation différentielle* $Y'' = Q(T)Y$. Commemoration volumes for Prof. Dr. Akitsugu Kawaguchi's seventieth birthday, Vol. III. Tensor (N.S.) **26** (1972), 121–128. (French)

MR **49** #5438

The author considers the ordinary differential equation (q) $y'' = q(t)y$, $q \in C^0(j)$, $j = (-\infty, \infty)$, and assumes that it is oscillatory. Under these conditions it is possible to define in the interval j a countable system of functions: $\dots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, such that, for any integral y of the equation (q) vanishing at $t = \bar{t}$, the values $\varphi_n(\bar{t})$, $\varphi_{-n}(\bar{t})$ represent the nth zero of this integral y, to the right and to the left of $\bar{t}$, respectively. The author then defines the distance function $d(t)$ for the equation (q) by $d(t) = \varphi_1(t) - t$, and studies the equations (q) that admit such a distance function that is periodic with π, i.e., $d(t + \pi) = d(t) + \pi$. He proves several propositions, which are too complicated to be reported here.

{For more complete bibliographic information about the collection in which this article appears, including the table of contents, see MR **48** #15.}

A. Averna (Perugia)

Zbl. 237.34051 (předběžný autoreferát)[20]

Es sei (q) $y'' = q(t)y$, $q \in C^0_{j=(-\infty,\infty)}$, eine oszillatorische Differentialgleichung und φ die Fundamentaldispersion erster Art von (q) ($\varphi(t)$ ist also die erste rechts von t liegende und mit t konjugierte Zahl erster Art). Die Abstandsfunktion d von (q) wird so definiert: $d(t) = \varphi(t) - t$. In der vorliegenden Arbeit werden Differentialgleichungen (q) mit π-periodischen Abstandsfunktionen untersucht: $d(t + \pi) = d(t)$. Dabei kommt insbesondere ein neuer Begriff, u.zw. der von inversen Differentialgleichungen, wesentlich zur Geltung. Die Differentialgleichungen (q), $(\overline{q})$ heißen (zueinander) invers, wenn sie inverse Phasen α, $\overline{\alpha}$ zulassen: $\overline{\alpha}(t) = \alpha^{-1}(t)$, $t \in j$. Einige Resultate: 1. Die Abstandsfunktion von (q) ist dann und nur dann π-periodisch, wenn die Fundamentaldispersion von (q) elementar ist: $\varphi(t + \pi) = \varphi(t) + \pi$. 2. Die Abstandsfunktion von (q) ist dann und nur dann π-periodisch, wenn die Differentialgleichungen mit den Trägern $q(t)$, $q(t + \pi)$ dieselbe Fundamentaldispersion haben. 3. Ist die Abstandsfunktion von (q) π-periodisch, so ist auch die von jeder inversen Differentialgleichung $(\overline{q})$ π-periodisch. 4. Die Differentialgleichungen (q) mit π-periodischen Trägern haben π-periodische Abstandsfunktionen. 5. Der Träger von (q) ist dann und nur dann π-periodisch, wenn die Fundamentaldispersion jeder zu (q) inversen Differentialgleichung eine Phase von $y'' = -y$ ist.

Autorreferat.

Zbl 254.34037

Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 237.34051.

[20] Předběžný autoreferát psal autor v okamžiku, když byl článek přijat k publikaci (viz Zbl 237.34051). Ve chvíli skutečného vydání článku jsou v Zbl (viz Zbl 254.34037) uvedeny pouze přesné bibliografické údaje a odkaz na předešlý autoreferát.

[27] *On central dispersions of the differential equation $y'' = q(t)y$ with periodic coefficients*. Ordinary and partial differential equations (Proc. Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1974), Lecture Notes in Math., Vol. 415. Springer – Verlag, Berlin, 1974, 47–61. (English)

MR **56** #8984

The paper continues the author's long history of work on the central dispersion theory for the equation $y'' = q(t)y$. A comprehensive review of this subject may be found in O. Borůvka's article [Differencial′nye Uravnenija **12** (1976), no. 8, 1347–1383; MR **55** #13003.]

{For the entire collection see MR **50** #10391.}

T. L. Sherman (Tempe, Ariz.)

Zbl 313.34008

[This article was published in the book announced in this Zbl. 284.00008.] In this lecture the author shows how his theory of dispersions of linear differential equations of the second order (q): $y'' = q(t)y$, enriches the classical Floquet theory in deep consequences. Let (q) be a both side oscillatory equation defined on $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. A phase of (q) is any function $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous on $\mathbb{R}$ and satisfying $\tan \alpha(t) = u(t)/v(t)$ on $\mathbb{R} - \{t \in \mathbb{R}; v(t) = 0\}$, where u, v are linearly independent solutions of (q). α is called a dispersion phase if $\alpha'(t) > 0$ and either $\alpha(t) > t$ or $\alpha(t) < t$ on $\mathbb{R}$. α is elementary if $\alpha(t + \pi) = \alpha(t) + \pi \cdot \operatorname{sgn} \alpha'$ on $\mathbb{R}$. All phases of the equation $y'' = y$ on $\mathbb{R}$ with the composition rule form the so called fundamental group $\mathfrak{C}$. For each integer n, the central dispersion φ_n of (q) is defined as follows: $\varphi_n(t)$ is the $|n|$-th conjugate number with the number t, greater or smaller than t according as $n > 0$ or $n < 0$; $\varphi_0(t) = t$. An equation $(\overline{q})$ is called inverse of (q) if $(\overline{q})$ has a phase $\overline{\alpha}$ which is inverse function of some phase α of (q), $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$. For more details see author [Linear differential transformations of the second order (London 1971, German original 1967; Zbl **153**, 112)]. The set of all equations (q) with $q(t + \pi) = q(t)$ on $\mathbb{R}$ is denoted as A_p. The set A is formed by all (q), whose φ_1 satisfy $\varphi_1(t + \pi) = \varphi_1(t) + \pi$ on $\mathbb{R}$. Some of results introduced in the lecture: „$(q) \in A_p$ iff each phase α of (q) satisfies $\alpha(t + \pi) = \varepsilon\alpha(t)$, where $\varepsilon \in \mathfrak{C}$ is a dispersion phase“, or „$(q) \in A_p$ iff all the central dispersions of each inverse equation of (q) lie in the fundamental group $\mathfrak{C}$“, or „ $(q) \in A$ iff each phase α of (q) satisfies $\alpha(t + \pi) = h\alpha(t)$ on $\mathbb{R}$ for an elementary dispersion phase h“, or

$$"(\frac{m}{M})^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \leq |s_{1,2}| \leq (\frac{M}{m})^{\frac{\sqrt{M}}{2}},$$

where $s_{1,2}$ are real periodicity factors of $(q) \in A_p$ according to the Floquet theory, $q(t) > 0$ on $\mathbb{R}$ and $m := \min q(t)$ and $M = \max q(t)$ for $t \in \mathbb{R}$”. It is very important that the whole theory of differential equations (q) with periodic coefficients can be expressed in a purely algebraic way and that these equations can be studied in the range of the abstract algebraic theory of oscillatory equations (q) given axiomatically.

F. Neuman

[28] *Sur la structure algébrique de la théorie des transformations différentielles linéaires du deuxième ordre.* Acta F. R. N. Univ. Comenianae, Mathematica **31** (1975), 59–71. (French. Czech, Russian summary)[21]

MR **52** #11169

This paper is closely connected with the author's book [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, VEB Deutscher Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743; English translation, English Universities Press, London, 1971] and uses the terminology and notation introduced there. The author considers oscillatory Sturm-Liouville equations $(q)\ y'' = q(t)y$ in the interval $j = (-\infty, \infty)$ $(q \in C_j^0)$. A phase $\alpha(t)$ is defined by $\operatorname{tg} \alpha(t) = u(t)/v(t)$, $\{u, v\}$ being a fundamental system of solutions. A bijective transformation (X): $T = X(t)$, $y = c/\sqrt{|X'(t)|}Y$ of the (T, Y)-plane on the (t, y)-plane induces a transformation of bases and phase functions. The phase functions form a group with respect to superposition. The author gives a more detailed study of these groups and an abstract characterization of these groups and of the transformation theory of oscillatory Sturm-Liouville equations in general.

G. Eisenreich (Leipzig)

Zbl 332.34009

The first part of this lecture (given at the „Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications“ in Brno, 1972) contains a survey of the theory of transformations of oscillatory Jacobian differential equations (1) $y'' = -q(t)y$ [cf. author, Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; Zbl **153**, 112), English translation by F. M. Arscott (London 1971)]. In the main second part the algebraic structure of this theory is described by a model essentially composed of the following ingredients. Given a group G (set of phase-functions), a subgroup G_0 (set of increasing phase-functions) of index 2 and a subgroup E (phases of $y'' = -y$), which have the properties: The normalizer of E equals E. The center Z of $E_0 := E \cap G_0$ is an infinite cyclic group corresponding to the set of phases $\{t + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Furthermore, there is given a homomorphism H of E onto the group $U := \{A \in GL(2, \mathbb{R}) | \det A = \pm 1\}$ such that $H(E_0) = \{A \in U | \det A = 1\}$ and the kernel of H is the subgroup of Z of index 2. The decomposition of G into right cosets of E corresponds to the phases of the different equations (1). By associating to each coset $\overline{a} := Ea$ a 2-dimensional real vector space $L\overline{a}$ (the space of solutions of the corresponding equation (1)) and by defining a quasinorm for bases of $L\overline{a}$, it is finally possible to describe the Kummer transformations in terms of the given algebraic objects. A list of open questions concludes the paper.

J. Hainzl

[21] Jedná se o plenární přednášku, kterou O. Borůvka proslovil na konferenci Equadiff III v Brně dne 28. 8. 1972. Tato přednáška nebyla otisknuta v Proceedings - Equadiff 3, Brno, 1972 (Vydala UJEP Brno, 1973). Důvodem nezahrnutí této přednášky do Proceedings byla politicky podmíněná skutečnost, že možnosti O. Borůvky při publikování příspěvků byly v té době poněkud omezené zejména v publikacích brněnské univerzity. Laskavostí bratislavských matematiků proto bylo zahrnutí této přednášky do časopisu Acta F. R. N. Univ. Comenianae.

Citujme z dopisu O. Borůvky redakci Acta F. R. N. Univ. Comenianae z 26. 3. 1973:

... po dohodě s prof. M. Gregušem, který byl předsedou mezinárodní konference EQUADIFF III, která se konala v Brně ve dnech 28. 8. – 1. 9. 1972, žádám Vás o laskavé uveřejnění přiloženého rukopisu, který nemohl vyjít ve Sborníku konference. Byl bych Vám vděčen, kdybyste můj rukopis mohli zařadit k uveřejnění co nejdříve, aby nenastalo příliš velké zpoždění za Sborníkem, který vyjde v nejbližší době...

[29] *Sur quelques compléments à la théorie de Floquet pour les équations différentielles du deuxième ordre*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **102** (1975), 71–77. (French)

MR **51** #10732

The author considers the ordinary differential equation (q) $y'' = q(t)y$, $q \in C^0(J)$, on the interval $J = (-\infty, \infty)$, where $q(t) < 0$ and $q(t + \pi) = q(t)$ for $t \in J$. He shows that the characteristic roots of the given equation and the function q are closely related. We state Theorem 2: If the characteristic roots s_1 and s_2 of the equation (q) are real then

$$(\frac{m}{M})^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \leq |s_i| \leq (\frac{M}{m})^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \qquad (i = 1, 2),$$

where $m = \min_{t \in j} |q(t)|$ and $M = \max_{t \in j} |q(t)|$.

A. Averna (Perugia)

Zbl 311.34012

In this article the author demonstrates connections between Floquet theory and his „Theory of dispersions" of linear oscillatory differential equations (1): $y'' = q(t)y$, $t \in \mathbb{R}$, and derives results that enriche both the theories in deep and interesting consequences. A function φ is (basic central) dispersion (of the 1st kind) of (1), if $\varphi(t_0)$ is the 1st zero on the right of t_0 of any nontrivial solution y of (1) that vanishes at t_0: $y(t_0) = 0$. Then φ_n denotes the n-th iterate of φ, and $d_n(t) := \varphi_n(t) - t$ is called the distance function of the index n. For more complete details and results see author [Linear diffeential transformations of the second order (London 1971, German original 1967; Zbl. **153**, 112)]. For $q(t) < 0$, $q(t + \pi) = q(t)$, let $m := \min\{|q(t)|;\, t \in \mathbb{R}\}$, $M := \max\{|q(t)|;\, t \in \mathbb{R}\}$, and s_1, s_2 denote the roots of the characteristic equation corresponding to (1) according to Floquet theory. Then s_1 and s_2 are real and positive (negative) iff there exist $x \in \mathbb{R}$ and positive even (odd) integer n such that $\sqrt{m} \leq n \leq \sqrt{M}$ and $d_n(x) = \pi$. In such a situation, $s_1 = (-1)^n \cdot (\varphi_n'(x))^{-1/2}$ and $s_2 = (-1)^n \cdot (\varphi_n'(x))^{1/2}$. Moreover, $s_1 \neq s_2$ iff $d_n'(x) \neq 0$. If s_i, $i = 1, 2$, are real, then

$$(\frac{m}{M})^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \leq |s_i| \leq (\frac{M}{m})^{\frac{\sqrt{M}}{2}}.$$

Especially for Mathieu equation $y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)y = 0$, $h \in \mathbb{R}$, $\lambda > 2h^2$, we get

$$\left(\frac{1 - 2h^2/\lambda}{1 + 2h^2/\lambda}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda + 2h^2}} \leq |s_i| \leq \left(\frac{1 + 2h^2/\lambda}{1 - 2h^2/\lambda}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda + 2h^2}}, \qquad i = 1, 2.$$

F. Neuman

[30] *Sur les blocs des équations différentielles $Y'' = Q(T)Y$ aux coefficients périodiques*. Rend. Mat., (6) **8** (1975), 519–532. (French. Italian summary)

MR **52** #849

The author continues the algebraic study of differential equations begun in his book [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743; English translation, English Universities Press, London, 1971]. The book not only explores an area of linear differential equations little noted in the U. S. A. (though the basic formulas are due to W. Leighton [Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1949), 253–274; MR **11**, 603]) and aspects of affine and projective differential geometry going back to E. Kummer and H. A.

Schwarz and rediscovered by more recent authors [cf. H. Flanders, J. Differential Geometry **4** (1970), 515–519; MR **43** #2619] but also has an interesting approach to groups of monotone functions defined on an interval and hence should be of interest to students of simple groups. The setting of the present paper is the following. Let $\mathfrak{G}$ be the group of strictly monotone C^2 functions on $[0, \infty)$ and $\mathfrak{F}_0$ the isomorphic image in $\mathfrak{G}$ of the double covering of SL(2, $\mathbb{R}$) in $\mathfrak{G}$ given by $t \mapsto \tan^{-1}(a \tan t + b)/(c \tan t + d)$, $ad - bc = \pm 1$, $\tan^{-1} 0 = 0$. Let $\mathfrak{F}$ be the group generated by $\cup \mathfrak{F}_n$, where $\mathfrak{F}_n$ is defined as $\mathfrak{F}_0$ but with $\tan^{-1} 0 = n\pi$. The groups that play a role in the theory of differential equations are the groups $\mathfrak{H}$ that contain $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. A coset $\mathfrak{F}g$ for $g \in \mathfrak{G}$ is a differential equation $y'' + q(t)y = 0$, i.e., all elements of $\mathfrak{F}g$ are phase functions α, $\tan \alpha = y_2/y_1$ for some basis of the solution space of the equation for $q(t) = \frac{1}{2}\{\tan \alpha, t\}$ and all phase functions belonging to one equation are in the coset. The cosets $g\mathfrak{F}$ contain one phase function each of a „block“ of differential equations. Theorem: Let $\mathfrak{H}$ be the group of phases of Hill equations $(q(t + \pi) = q(t))$. Then the Floquet multipliers [and the Ljapunov discriminant] are constant on the blocks of $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$ [are functions of the homogeneous space $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$]. {The author would help the general acceptance of his approach by changing the name of his „central dispersions“ to the accepted „conjugate points“.}

{For the entire collection see MR **51** #9998.}

H. W. Guggenheimer (Brooklyn, N. Y.)

Zbl 326.34007

Let (1): $y'' = q(t)y$ be oscillatory both for $t \to -\infty$ and for $t \to \infty$. In his transformation theory of those equations the author introduced a (1st) phase of (1) as a continuous function α satisfying $\tan \alpha(t) = u(t)/v(t)$ for an independent pair u, v of solutions of (1). All phases for all equations (1) form a group G (with the superposition law) and all phases of the equation $y'' = -y$ on $(-\infty, \infty)$ form the subgroup F. Elements of the right decomposition G with respect to F are in 1 – 1 correspondence with the equations (1). Elements of the least common covering of the right and left decompositions G with respect to F are called „blocks“. The author shows how this algebraic approach enriches the classical Floquet theory of periodic equations (1) – „The law of inertia of characteristic multipliers“: All equations (1) with π-periodic coefficients q corresponding to the same block have the same characteristic multipliers.

F. Neuman

[31] *Ueber die Differentialgleichungen $y'' = q(t)y$ mit periodischen Abständen der Nullstellen ihrer Integrale*. 5. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1975. Wiss. Schr. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt, Heft 2, 1975, 239–255. (English)

MR **55** #3416

The author investigates a class of differential equations $y'' = q(t)y$ by the aid of transformation theory and his own theory of dispersions. Although the important ideas are explained, the author's earlier book [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743] will be of help during the reading of this lecture.

{For the entire collection see MR **54** #12428.}

L. Pintér (Szeged)

Zbl 398.34031

[This article was published in the book announced in this Zbl. 373.00008.] The aim of this paper is to investigate oscillatory properties of solutions of second order differential equation

(q) $y'' = q(t)y$, with $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous, and satisfying further conditions. For each integer n, let $\rho_n(t)$ be defined as follows: $\rho_0(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$; for $|n| \geq 1$, $\rho_n(t)$ is the $|n|$-th conjugate point to the point t, $t \in \mathbb{R}$, situated at right with respect to t when $n > 0$, and at left with respect to when $n < 0$. The function $\rho_n(t)$ is called the central dispersion with index n. The main attention is paid to the case when the functions $d_n(t) = \rho_n(t) - t$ are periodic of period π. The equations (q) for which this property holds true are said to belong to the class A. Connections with groups theory are emphasized. The paper is very much in the vein of the author's book „Linear differential transformations of the second order" (1971; Zbl. 222.34002).

C. Corduneanu

[32] *Contribution à la théorie algébrique des équations $Y'' = Q(T)Y$.* Boll. Un. Mat. Ital., B (5) **13** (1976), 896–915. (French. Italian summary)

MR **58** #22789

Linear second-order differential equations of the stated type are assumed to have periodic solutions on the real line for each function Q. The set of all such equations is divided into (disjoint) equivalence classes via the phases or phase functions of the equation $y'' = -y$; two phases are equivalent if there is an invertible bilinear transformation linking them. Thus the phases form a group under (function) composition and the properties of the phases are translated into algebraic terms: periodicity, evenness, monotonicity are made equivalent to the properties of various subgroups. Explicit formulae are given for all transformations and properties, and an example is worked out for the Mathieu equation. The author does not make clear why one is studying the phases of differential equations, nor to what use these may be put; the article relies somewhat on the author's book referred to therein [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743].

J. J. Cross (Zbl **364** #34002)

Zbl 364.34002 (stejné jako v MR)

Linear second-order differential equations of the stated type are assumed to have periodic solutions on the real line for each function Q. The set of all such equations is divided into (disjoint) equivalence classes via the phases or phase functions of the equation $y'' = -y$; two phases are equivalent if there is an invertible bilinear transformation linking them. Thus the phases form a group under (function) composition and the properties of the phases are translated into algebraic terms: periodicity, evenness, monotonicity are made equivalent to the properties of various subgroups. Explicit formulae are given for all transformations and properties, and an example is worked out for the Mathieu equation. The author does not make clear why one is studying the phases of differential equations, nor to what use these may be put; the article relies somewhat on the author's book referred to therein [Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; **153**, 122)].

J. J. Cross

[33] *Diferenciální rovnice $Y'' = Q(T)Y$ s periodickými koeficienty v souvislosti s teorií dispersí.* Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT v Brně, B-67, 1976, 31–42.

Zbl 416.34034

In the article, the relations are described between the characteristic roots of the Hill differential equation and some elements of the dispersion theory, especially phases and central dispersions. Special attention is devoted to the so-called blocks of oscillatoric equations $y'' = q(t)y$ $(q(t) \in C_j^0,\ j = (-\infty, \infty))$. These are characterized by that all equations of the same block originate from one of them by transformations of the independent variable by phases $\varepsilon(t)$ of the equation $y'' = -y : t \to \varepsilon(t)$. Simultaneously, all the equations of the same block have or have not periodic carriers, e. g. with π. For the blocks the so called theorem of inertia of characteristic roots holds: Equations of the same block with π-periodic carriers have identical characteristic roots and, at the same time, they all have or have not all their integrals π-semiperiodic or π-periodic.

Summary.

[34] *Теория глобальных свойств обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифференциальные уравнения, Минск, **12** (1976), no. 8, 1347–1383, 1523. (Russian)

Theory of the global properties of ordinary second order linear differential equations. Differential Equations **12** (1976), no. 8, 949–975 (1977).

MR **55** #13003

The author gives a self-contained survey of the global theory of Sturm-Liouville equations developed in his book [*Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1967; MR **38** #4743; English translation, *Linear differential transformations of the second order*, English Univ. Press, London, 1971] and in some other papers (especially theory of phases, dispersion theory, Kummer transformations, algebraic theory of oscillatory equations).

{English translation: Differential Equations **12** (1976), no. 8, 949–975 (1977).}

G. Eisenreich (Leipzig)

Zbl 348.34007

The article is a very nice survey of the global structure of linear homogeneous differential equations of the second order in the real case and give s brief but comprehensive view on the results developed and published by O. Borůvka [Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung (1967; Zbl. **153**, 112) (English translation with supplement: Linear differential transformations of the second order, The English Universities Press, London 1971)] and in several papers of the author and his pupils in the last 25 years. On the contrary to the investigations of Kummer, Laguerre, Brioschi, Forsyth, and others, started in the middle of the last century and having been of local character, here the original investigations are global, and besides many new results concerning mainly the algebraic structure of both side oscillatory differential equations of the form $y'' = q(t)y$ on $\mathbb{R}$, they cover also classical subjects, like differential equations with periodic coefficients and Floquet Theory, studying them in this modern and original setting. In the last chapter there is a short account of the latest results concerning the global theory of linear differential equations of the n-th order, $n \geq 2$. The article should not be left without attention of those who are interested in the global theory of linear differential equations since it presents an original and modern approach to the area in brief however exact form and gives a perfect orientation in the field without requirements on supplementary sources.

F. Neuman

Zbl 375.34012 (anglický překlad)

Translation from Differencial'nye Uravnenija **12**, 1347–1383 (1976; Zbl 348.34007)

[35] *Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations* $Y'' = Q(t)Y$. Lecture Notes in Mathematics 703 (Proc. Conf. Equadiff IV, Prague 1977). Springer – Verlag, Berlin, 1979, 35–45. (English)

MR **80** #34037

The basic statements of the algebraic method, developed by the author and his scientific school, for studying global properties of oscillatory equations $y'' = Q(t)y$ are presented.
{For the entire collection see MR 80c:34002.}

I. Kiguradze (Tbilisi)

Zbl 405.34009

[Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 393.00004 angezeigten Sammelwerk.] Die Theorie der linearen Differentialgleichungen (Diffgen) 2. Ordnung im reellen Gebiet, (Q): $y'' = Q(t)y$, $Q \in C_j^{(0)}$, $j = (-\infty, \infty)$, in ihrem vollen Umfang, weist zahlreiche Bindungen an algebraischen und differentialgeometrischen Fragestellungen auf [vgl. O. Borůvka, Linear Differential Transformations of the Second Order (1967; Zbl. **153**, 112)]. Dies gilt insbesondere für oszillatorische Diffgen (Q). In diesem Fall werden jeder Diffg (Q) die sogen. adjungierten Gruppen zugeordnet: $\mathfrak{U}_Q \supset \mathfrak{B}_Q \supset \mathfrak{B}_Q^+ \supset \mathfrak{L}_Q$; $\mathfrak{B}_Q$ ist die Dispersionsgruppe von (Q), $\mathfrak{B}_Q^+$ die von den wachsenden Dispersionen von (Q) gebildete Untergruppe von $\mathfrak{B}_Q$, $\mathfrak{L}_Q$ ist das Zentrum von $\mathfrak{B}_Q^+$, $\mathfrak{U}_Q$ ist der Normalisator von $\mathfrak{L}_Q$ in der Phasengruppe. Zwischen den adjungierten Gruppen von zwei Diffgen (Q), (P) bestehen gewisse Beziehungen, die in den sogen. Inklusionssätzen beschrieben werden, wobei diese zum Teil von dualem Charakter sind. Wird (Q) mittels des Transformators X in (P) (global) transformiert, so gehen die mit X transformierten adjungierten Gruppen von (Q) in die entsprechenden adjungierten Gruppen von (P) über: $X^{-1}\mathfrak{U}_Q X = \mathfrak{U}_P$, usw. Im Fall $Q = -1$ sind die adjungierten Gruppen explizit darstellbar. Jede Diffg (Q) kann vermöge ihrer Phasen in die Diffg (-1) transformiert werden. Es gereicht zum Vorteil, diese letztere wegen ihrer Einfachheit in den Mittelpunkt von Betrachtungen zu stellen, in dem Sinn, daß die Diffgen (Q) als Transformierte von (-1) angesehen werden. Die entsprechende Theorie wird als die spezialisierte algebraische Theorie der Diffgen (Q) bezeichnet. Weitere den Diffgen (Q) zugeordneten Objekten algebraischen Ursprungs sind die inversen Diffgen und Blöcke von Diffgen. Die Menge aller Diffgen (Q) zerfällt in Blöcke, die paarweise zueinander invers sind. Je zwei in zueinander inversen Blöcken liegende Diffgen sind zueinander invers. Untersuchungen über diese Begriffe, im Rahmen der gesamten Theorie ergeben zahlreiche neue Resultate. Im Fall von Diffgen (Q) mit periodischen Koeffizienten erhält man eine weitgehende Erweiterung und Vertiefung der Floquetschen Theorie der linearen Diffgen 2. Ordnung.

Autorreferat.

[36] *Sur une classe des groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable*. Ann. Polon. Math. **42** (1983), 25–35. (French)

MR **85** #58014

The author studies the groups of continuous one-to-one mappings from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ satisfying: for all $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ there is exactly one $g \in \mathfrak{G}$ such that $g(t) = x$. The mappings $g \in \mathfrak{G}$ are strictly increasing; and the relation $g \preceq h$, defined as "$g(t) \leq h(t)$ for some $t \subset \mathbb{R}$", is a linear and Archimedean order on $\mathfrak{G}$. So there are isomorphisms $h\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{G}$. If $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is defined by $S(t, x) = h(x)(t)$, there is a continuous and increasing function $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $G(S(t, x)) = G(t) + G(x)$. The author shows that the function G, which is uniquely defined except for a constant multiplier, characterizes the group $\mathfrak{G}$.

François Aribaud (Paris)

Zbl 533.26003

The theory of continuous iteration groups on $\mathbb{R}$ is developed under supposition of 'planarity' ('completeness'): through every point of $\mathbb{R}^2$ goes the graph of exactly one function of the group. Further results are due to *G. Blanton* [Arch. Math., Brno 18, 121–128 (1982; Zbl. 518.26002), joint wth *J. Baker*; C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. 5, 169–172 (1983; Zbl. 518.26003); Aequationes Math. (to appear)] on]0,1[rather than $\mathbb{R}$.

J. Aczél

[37] *Sur les transformations simultanées de deux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dans elles-mêmes*, Applicable Analysis **15** (1983), no. 1–4, 187–200. (French)

MR **85** #34034

Consider the second-order linear, oscillatory differential equation (Q): $y'' = Q(t)y$ $(t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), Q \in C^0)$. We know that there exist functions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, called the dispersions of (Q), which transform the differential equation (Q) into itself. The dispersions of (Q) are precisely the solutions of the differential equation $-\{X, t\} + Q(X)X'(t) = Q(t)$, and they form a group $\mathfrak{B}_Q$ depending on three parameters. The increasing dispersions of (Q) form an invariant subgroup $\mathfrak{B}_Q^+$ of $\mathfrak{B}_Q$.

Let $(Q_1), (Q_2)$ be arbitrary equations of the kind considered. The intersection $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2} = \mathfrak{B}^+_{Q_1} \cap \mathfrak{B}^+_{Q_2}$ is, of course, a group whose elements simultaneously transform the equations $(Q_1), (Q_2)$ into themselves. The main result of the present paper implies that the group $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ is *o*-isomorphic to a subgroup of the additive group of real numbers. Further properties of $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ depend primarily on whether the set $B = E_x = \{x \in \mathbb{R},\ Q_1(x) - Q_2(x) = 0\}$ is empty or not and also, in both cases, on other relations between the functions Q_1, Q_2. These relations cannot be given in detail here. In particular, if $B \neq 0$, then the group $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ is trivial $(= \{\text{identity}\})$ or is an infinite cyclic group.

O. Borůvka (Brno)

Zbl 494.34021 (předběžný autoreferát)

Eine lineare oszillatorische Differentialgleichung zweiter Ordnung (Q): $y'' = Q(t)y$ $(t \in \mathbb{R}, Q \in C^0)$ kann durch geeignete Funktionen, die Dispersionen von (Q), in sich transformiert werden. Die Dispersionen von (Q) sind genau die Integrale der Differentialgleichung $-\{X, t\} + Q(X)X'^2(t) = Q(t)$ und bilden eine dreiparametrige Gruppe $\mathfrak{L}_Q$. Die wachsenden Dispersionen von (Q) bilden einen Normalteiler $\mathfrak{L}_Q^+$ von $\mathfrak{L}_Q$. In der vorliegenden Arbeit werden gemeinsame wachsende Dispersionen von zwei Differentialgleichungen (Q_1), (Q_2) $(Q_1 \neq Q_2)$ untersucht. Dieselben bilden die Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2} = \mathfrak{L}^+_{Q_1} \cap \mathfrak{L}^+_{Q_2}$. Das Hauptergebnis der Untersuchung ist der Satz, daß die Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen o-isomorph ist. Die Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ hängen zunächst davon ab, ob die Menge $B = E$ $(x \in \mathbb{R}, Q_1(x) - Q_2(x) = 0)$ leer ist oder nicht, und in beiden Fällen auch noch von anderen Beziehungen der Funktionen Q_1, Q_2 zueinander. Im Falle $B \neq \emptyset$ ist die Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ entweder die triviale Gruppe $\{id\}$ (z. B. dann, wenn die Menge B beschränkt ist) oder aber eine unendliche zyklische Gruppe. Im Falle $B = \emptyset$ kommen für Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ neben den zwei soeben angeführten Typen auch andere Typen in Betracht. Unter gewissen Umständen ist die Gruppe $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ planar, d. h. so beschaffen, daß durch jeden Punkt der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau ein Element von $\mathfrak{P}^+_{Q_1Q_2}$ hindurchgeht.

Autorreferat.

Zbl 506.34031

See the preview (Autorreferat) in Zbl. 494.34021.

[38] *Sur les sous-groupes planaires des groupes des dispersions des équations différentielles lineáires du deuxième ordre*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **97** (1984), 35–41. (French. English summary)

MR **86** #34058

The paper is a continuation of previous works of the author [cf. *Linear differential transformations of the second order*, English translation, English Universities Press, London, 1971; MR **57** #3484; Ann. Polon. Math. **42** (1983), 25–35; MR 85b:58014]. Let Q be a continuous real-valued function which is defined on $\mathbb{R}$, and (E) the second-order differential equation $y'' = Q(t)y$. A C^3-diffeomorphism of $\mathbb{R}$ is called a dispersion of Q if, for each solution y of E, the function $z(t) = y(f(t))/\sqrt{f'(t)}$ is also a solution of (E). With the usual composition of mappings, the set of the dispersions of Q is a group $\mathfrak{V}_Q^+$. Dispersions are characterized as solutions of the highly nonlinear differential equation $-\frac{1}{2}S(f) + Q(f)f'^2 = Q$, where $S(f)$ denotes the Schwarzian derivative of f.

The paper is devoted to some results concerning the algebraic structure of the group $\mathfrak{V}_Q^+$. A subgroup of $\mathfrak{V}_Q^+$ is said to be planar if through each point of the plane $\mathbb{R}^2$ there passes just one element of the subgroup. The author shows: (i) the planar subgroups of a given $\mathfrak{V}_Q^+$ form a system depending on two constants, the intersection of which is exactly the center of $\mathfrak{V}_Q^+$; (ii) the intersection of those groups $\mathfrak{V}_Q^+$ which contain a given planar group $\mathfrak{S}$ is exactly $\mathfrak{S}$.

François Aribaud (Paris)

Zbl 554.34026

A group $\mathfrak{S}$ consisting of real continuous functions of one real variable on the interval $j = (-\infty, \infty)$ is called planar if through each point of the plane $j \times j$ there passes just one element $s \in \mathfrak{S}$. Every differential oscillatory equation (Q): $y'' = Q(t)y\ (t \in j = (-\infty, \infty), Q \in C^{(0)})$ admits functions, called the dispersions of (Q), that transform (Q) into itself. These dispersions are integrals of Kummer's equation (QQ): $-\{X, t\} + Q(X)X'^2(t) = Q(t)$ and form a three-parameter group $\mathfrak{B}_Q$, known as the dispersion group of (Q). The increasing dispersions of (Q) form a three-parameter group $\mathfrak{B}_Q^+ (\subset \mathfrak{B}_Q)$ invariant in $\mathfrak{B}_Q$. The centre of the group $\mathfrak{B}_Q^+$ is an infinite cyclic group $\mathfrak{C}_Q$, whose elements, the central dispersions of (Q), describe the position of conjugate points of (Q).

The present paper contains new results concerning the algebraic structure of the group $\mathfrak{B}_Q^+$. It provides information on the following: (1) the existence and properties of planar subgroups of a given group $\mathfrak{B}_Q^+$ and (2) the existence and properties of the groups $\mathfrak{B}_Q^+$ containing a given planar group $\mathfrak{S}$. The results obtained are: the planar subgroups of a given group $\mathfrak{B}_Q^+$ form a system depending on two constants, $\mathcal{S}Q$, such that $\cap\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_Q$ for all $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}Q$. The equations (Q) whose groups $\mathfrak{B}_Q^+$ contain the given planar group $\mathfrak{S}$ form a system dependent on one constant, $\mathcal{Q}S$, such that $\cap\mathfrak{B}_Q^+ = \mathfrak{S} = \cup\mathfrak{C}_Q$ for all (Q)$\in \mathcal{Q}S$.

Autorreferat.

[39] *Sur les blocs des équations différentielles linéaires du deuxième ordre et leurs transformations*. Čas. pěst. mat. fys. 1, **111** (1986), 78–88, 90. (French)

MR **88** #34046

The author considers a class (E) of second-order linear equations $(P)\ y'' = P(t)y$, where $P: (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$ is continuous. It is assumed that each equation in the class (E) is oscillatory and that the solutions oscillate as $t \to \infty$ and as $t \to -\infty$. Let B_p be the group of transformations of (P) into itself. This paper is concerned with the decompositions of B_p.

John R. Graef (1-MSS)

Zbl 596.34022

Es sei M die Menge der linearen oszillatorischen Differentialgleichungen $P : y'' = P(t)y\ (P \in C_R^0,\ R = (-\infty,\infty))$. Ferner sei G die Phasengruppe und α der folgende Homomorphismus von G in die Gruppe S(M) der bijektiven Abbildungen der Menge M auf sich: Das Bild von $P \in M$ in der dem Element $\omega \in G$ zugeordneten Bijektion $\alpha(\omega) = \varphi_\omega \in S(M)$ ist die Differentialgleichung $(\varphi_\omega(P) =)\ Q \in M$ mit dem Träger $Q(t) = -\{\omega,t\} + P[\omega(t)] \cdot \omega'^2(t)$ $(t \in R)$. Man spricht von der ω-Transformation von P in Q. In dieser Situation stellt (M,G;α) einen (algebraischen) homogenen Raum mit dem Operatorenbereich G dar.

Es sei $P \in M$. Ausgehend von P werden gewisse Untermengen von M, die Blöcke mit der Basis P, konstruktiv definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Insbesondere ist die Menge dieser Blöcke eine Zerlegung von M und der die Differentialgleichung $X \in M$ enthaltende Block stellt die von der Dispersionsgruppe von P erzeugte Trajektorie von X dar. Die betrachteten Zerlegungen von M sind im bezug auf ω- Transformationen ihrer Basen mit den letzteren kovariant.

Autorreferat.

Přílohy

Příloha 1. Přehled vzdělání a zaměstnání O. Borůvky

Následující údaje jsou čerpány z osobních dokumentů O. Borůvky, které jsou uloženy v Brně v archivu O. Borůvky a v Praze v archivu AV ČR.

Vzdělání :

Obecná a měšťanská škola v Uherském Ostrohu (1905 – 1911)
Gymnázium v Uherském Hradišti (1911 – 1916)
Vojenská vyšší reálka v Hranicích na Moravě (1916 – 1917)
Vojenská technická akademie v Mödlingu u Vídně (1917 – 1918)
Česká vysoká škola technická v Brně (1918 – 1920)
Masarykova univerzita v Brně (1920 – 1922)

Studijní stáže :

Univerzita Paříž (1926 – 1927, 1929 – 1930)
Univerzita Hamburg (zimní semestr 1930 – 1931)

Dosažený stupeň vzdělání :

Česká vysoká škola technická v Brně – I. státní zkouška z oboru stavebního inženýrství (26. 6. 1920)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – II. státní zkouška z matematiky a fyziky pro učitelství na středních školách (4. 12. 1922)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – doktorát přírodních věd (RNDr.) (23. 6. 1923)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – habilitace z matematiky (1928)
ČSAV – doktorát fyzikálně – matematických věd (DrSc.) (29. 2. 1956)

Zaměstnání :

Česká vysoká škola technická v Brně – asistent při fyzikálním ústavu (1. 12. 1920 – 30. 9. 1921)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – asistent při matematickém ústavu (1. 10. 1921 – 30. 9. 1934)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – mimořádný profesor (1. 10. 1934 – 30. 4. 1940)
Přírodovědecká fakulta MU v Brně – řádný profesor (1. 5. 1940 – 28. 2. 1970)
Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno – vedoucí vědecký pracovník, DrSc. (1. 10. 1969 – 31. 12. 1980)
Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno – vědecký pracovník – konzultant (1. 1. 1981 – 22. 7. 1995)

Příloha 2. Profesoři a docenti matematiky na MU v letech 1920 – 1967

Masarykova univerzita v Brně byla založena roku 1919 a matematický ústav byl na její přírodovědecké fakultě zřízen roku 1920. Vlastní výuka matematiky začala v zimním semestru 1920/21. Jediným řádným profesorem matematiky v tomto školním roce byl Matyáš Lerch, který přešel na matematický ústav z brněnské techniky. Od školního roku 1921/22 zde začal působit druhý řádný profesor Ladislav Seifert. V srpnu 1922 umírá M. Lerch a na jeho místo nastupuje od školního roku 1923/24 jako mimořádný profesor Eduard Čech, který byl roku 1928 jmenován řádným profesorem. Kromě toho některé přednášky z matematiky vedl i profesor teoretické fyziky Bohuslav Hostinský. Od letního semestru 1927/28 zde začíná působit docent Josef Kaucký, který byl roku 1937 jmenován mimořádným profesorem. Od zimního semestru 1928/29 začíná přednášet docent Otakar Borůvka, který se stává mimořádným profesorem roku 1934. Tento profesorský sbor zůstává stejný až do posledního semestru před válkou – do zimního semestru 1939/40. O situaci v dalších letech se více dozvíme z následující tabulky.

Jméno	Docent (profesor) na MU (do roku 1967)
Matyáš Lerch	1920 – 1922
Ladislav Seifert	1921 – 1956
Eduard Čech	1923 – 1945
Josef Kaucký	1928 – 1939
Otakar Borůvka	od 1928
Josef Novák	1939 – 1948
Vladimír Knichal	1945 – 1950
Karel Koutský	1952 – 1964
Miroslav Novotný	od 1953
Miloš Zlámal	1956 – 1961
František Šik	od 1958
Karel Svoboda	od 1959
Miloš Ráb	od 1961
Ladislav Kosmák	od 1962
Milan Sekanina	od 1963
Erich Barvínek	od 1966
Jiří Hořejš	od 1966
František Neuman	od 1966
Václav Polák	od 1966
Vítězslav Novák	od 1967

Tabulka uvádí přehled profesorů a docentů matematiky působících na Přírodovědecké fakultě MU od jejího založení do roku 1967. Kromě jmen je zde uveden časový interval jejich docentského, příp. profesorského působení na MU. V případě, že toto působení není ohraničeno shora, znamená to překročení roku 1967, nikoliv působení dodnes. Ještě poznamenejme, že seznam nezahrnuje externí učitele a byl vytvořen na základě seznamů uvedených v publikaci [C1].

Příloha 3. Disertační práce z diferenciálních rovnic na MU do roku 1967

Tato příloha přináší soupis disertačních prací z diferenciálních rovnic, které byly uznány jako vyhovující podklad k rigorosnímu řízení a soupis obhájených disertačních prací kandidátů a doktorů věd na MU a UJEP od jejího založení do roku 1967. Informace jsou čerpány z *Ročenky brněnské university 1964 – 1968* [C4].

Disertační práce byly předkládány jako součást rigorosních zkoušek k dosažení doktorátu. Práce posuzovali dva profesoři z oborů, z nichž byla skládána rigorosní zkouška. Ustanovení vycházely z nařízení č. 57/1872 a 56/1899 říšského zákoníku a později z vládního nařízení č. 214/1921 Sbírky zákonů a nařízení pro nově vzniklé přírodovědecké fakulty. Požadavek disertační práce však zůstal zachován. Změny nastaly až v roce 1953, kdy vládní nařízení č. 60/1953 Sb. o vědeckých hodnostech a označování absolventů vysokých škol ruší udílení doktorátů na vysokých školách a zavádí označení absolventů titulem *promovaný* s označením absolvovaného oboru. Nový vysokoškolský zákon z roku 1966 obnovuje udílení titulu *Dr.* absolventům vysokých škol univerzitního směru. Pro dosažení titulu *RNDr.* je předpokladem opět předložení písemné disertační práce, kterou však posuzoval již jen jeden odborník.

Do seznamu disertací do roku 1953 jsou zahrnuty všechny práce, které požadavkům rigorosního řádu vyhovovaly a byly přijaty. Mohou mezi nimi být také některé práce, které sice byly uznány jako vyhovující, ale k dokončení rigorosního řízení již z nějakého důvodu nedošlo. Seznamy disertací od roku 1966 zahrnují jen ty práce, které skutečně byly podkladem rigorosního řízení a nejsou zde uváděni ti, kdo dosáhli titulu na základě dříve získané hodnosti kandidáta věd.

Za zmínku stojí, že úplně první doktorskou disertací z matematiky schválenou na MU byla práce O. Borůvky s názvem *O pomyslných kořenech rovnice* $\Gamma(z) = a$, která byla předložena 7. 5. 1923 a schválena 24. 5. 1923. Práci posoudili L. Seifert a B. Hostinský. Seznam doktorských disertačních prací, jež se týkaly diferenciálních rovnic do roku 1967, je uveden v *Tabulce 1*.

Udílení vědeckých hodností kandidáta věd (*CSc.*) a doktora věd (*DrSc.*) přineslo již výše zmíněné vládní nařízení č. 60/1953 Sb. o vědeckých hodnostech a označování absolventů vysokých škol. Tyto hodnosti mohly udílet nejenom vysoké školy, ale i ČSAV pod řízením Státní komise, později Státního výboru pro vědecké hodnosti. Titulu kandidáta věd bylo možno dosáhnout po přípravě formou aspirantury. Později bylo umožněno dosažení hodnosti bez předchozí aspirantury. Práce kandidátů věd byly posuzovány zpravidla dvěma oponenty a práce doktorů věd třemi oponenty.

První disertační kandidátské práce byly na Přírodovědecké fakultě MU schváleny roku 1955. Do roku 1967 bylo schváleno celkem 33 prací z matematiky, z toho se 15 týkalo diferenciálních rovnic. Jejich přehled je uveden v *Tabulce 2*.

První disertační práce doktorů věd byly na Přírodovědecké fakultě UJEP schváleny roku 1960. Několik vědeckých hodností DrSc. bylo sice uděleno i před rokem 1960, avšak bez předložení disertační práce, pouze na základě celoživotní vědeckovýzkumné činnosti. Také O. Borůvka získal hodnost DrSc. roku 1956 bez předložení disertační práce. Pro zajímavost uveďme, že do roku 1967 bylo na Přírodovědecké fakultě UJEP obhájeno celkem pět disertačních prací doktorů věd, z čehož jsou čtyři z diferenciálních rovnic a jedna z biologie. Jejich přehled je uveden v *Tabulce 3*.

Tabulka 1. Doktorské disertační práce týkající se diferenciálních rovnic

Jméno	Datum schválení	Titul disertace	Jména examinátorů
V. Richter	4. 4. 1949	O nekonečných systémech obyčejných diferenciálních rovnic.	O. Borůvka, V. Knichal
M. Král	27. 4. 1949	Závislost řešení systému diferenciálních rovnic 1. řádu na počátečních podmínkách a parametrech pravých stran.	O. Borůvka, L. Seifert
M. Zlámal	29. 11. 1949	O postačujících podmínkách pro jednoznačnost řešení systému $y' = f(x, y_1, .., y_n)$ a posloupnostech souvisejících s tímto systémem.	O. Borůvka, L. Seifert
V. Polášek	20. 2. 1950	O průběhu řešení systému homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu v okolí singulárních bodů.	O. Borůvka, L. Seifert
S. Krohová	10. 10. 1951	O vlastnostech integrálů systému dvou diferenciálních lineárních rovnic prvního řádu.	O. Borůvka, L. Seifert
J. Čermák	10. 1. 1952	O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic.	O. Borůvka, L. Seifert
O. Litzman	2. 2. 1952	O závislosti řešení diferenciální rovnice 1. řádu na počátečních podmínkách a na parametru.	O. Borůvka, L. Seifert
J. Široký	2. 6. 1952	O závislosti průběhu řešení na parametru v okolí singulárního bodu diferenciální rovnice.	O. Borůvka, L. Seifert
M. Ráb	10. 7. 1953	Příspěvky k theorii diferenciálních lineárních rovnic 2. řádu.	O. Borůvka, L. Seifert
M. Vlasáková	15. 7. 1953	Aplikace theorie dispersí na Besselovy funkce.	O. Borůvka, L. Seifert
J. Březina	20. 7. 1953	Souvislost typů obecného integrálu a charakteristických čísel matice koeficientů Jacobiovy rovnice.	O. Borůvka, L. Seifert
J. Dula	3. 3. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení diferenciální lineární homogenní rovnice 4. řádu.	M. Ráb
I. Res	8. 3. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení diferenciální rovnice $y'' + ay' + w(x)y = 0$.	M. Ráb
J. Kolářová – Sedlářová	8. 3. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení lineární diferenciální rovnice 3. řádu v případě neoscilatorickém.	M. Ráb
D. Radochová – Řehůřková	10. 3. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 3. řádu.	M. Ráb
J. Vosmanský	7. 4. 1967	The monotonisity of Extremants of Integrals of the diferential Equation $y'' + q(t)y = 0$.	M. Ráb
J. Žadek	19. 5. 1967	O existenci ohraničených riešení diferenciálnej rovnice $y' = f(x, y)$.	M. Ráb
J. Suchomel	19. 5. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu v případě neoscilatorickém.	M. Ráb

Tabulka 2. Disertace kandidátů věd týkající se diferenciálních rovnic

Jméno	Datum schválení	Titul disertace	Jména examinátorů
M. Zlámal	27. 4. 1955	Studium oscilačních a asymptotických vlastností řešení lineárních diferenciálních rovnic.	J. Hronec, V. Knichal
M. Laitoch	6. 6. 1956	Aplikace teorie dispersí v oboru homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.	J. Hronec, J. Kurzweil
M. Greguš	14. 6. 1957	O některých vlastnostech řešení lineární diferenciální rovnice 3. řádu.	J. Hronec, M. Zlámal
M. Švec	27. 11. 1957	O niektorých vlastnostiach integrálov diferenciálnych rovníc typu $y^{(n)} + Q(xy) = Q''$.	J. Hronec, M. Zlámal
M. Ráb	27. 11. 1957	Oscilační a asymptotické vlastnosti integrálů lineární diferenciální rovnice 3. řádu.	J. Hronec, M. Zlámal
V. Šeda	18. 12. 1957	Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu v komplexnom obore.	O. Borůvka, M. Švec
J. Brejcha	12. 2. 1958	O některých možnostech geometrické interpretace diferenciální rovnice typu $\frac{d^2v}{du^2} = A + B\frac{dv}{du} + C(\frac{dv}{du})^2 + D(\frac{dv}{du})^3$.	J. Klapka, J. Srb
Z. Hustý	18. 2. 1959	Homogenní lineární diferenciální rovnice vyšších řádů.	J. Hronec, O. Borůvka
E. Barvínek	18. 2. 1959	Aplikace teorie transformací diferenciálních rovnic 2. řádu.	J. Hronec, M. Zlámal
S. Šantavá – Krohová	24. 10. 1960	Transformace integrálů systémů dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.	O. Borůvka, M. Greguš
J. Chrastina	24. 10. 1960	Speciální vlastnosti integrálních křivek některých diferenciálních rovnic.	J. Kaucký, M. Zlámal
F. Neuman	22. 2. 1965	Teorie dispersí.	M. Novotný, M. Greguš
J. Voráček	3. 10. 1966	Vlastnosti řešení jistých nelineárních diferenciálních rovnic třetího řádu.	M. Švec, I. Vrkoč
S. Trávníček	8. 11. 1966	Transformace řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic prvého řádu.	Z. Hustý, V. Šeda
J. Miklíček	16. 5. 1967	Použití Greenovy funkce pro odhad chyby při řešení parciálních diferenciálních rovnic 4. řádu metodou sítí.	K. Rektorys, M. Práger

Tabulka 3. Disertace doktorů věd týkající se diferenciálních rovnic

Jméno	Datum schválení	Titul disertace	Jména examinátorů
Z. Hustý	15. 6. 1965	O iteraci, transformaci a ekvivalenci homogenních lineárních diferenciálních rovnic a některých vlastnostech jejich integrálů.	O. Borůvka, J. Kurzweil, V. Šeda
M. Švec	15. 6. 1965	Oscilatorické a asymptotické vlastnosti riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc 3. a 4. rádu.	O. Borůvka, M. Novotný, J. Kurzweil, J. Nečas
M. Greguš	15. 6. 1965	Lineárna diferenciálna rovnica tretieho rádu.	O. Borůvka, M. Novotný, J. Kurzweil, J. Nečas
M. Ráb	16. 5. 1967	Asymptotické vzorce pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic.	O. Borůvka, J. Kurzweil, M. Laitoch

Literatura

A) Publikace o O. Borůvkovi

[A1] M. Novotný, K. Svoboda, M. Zlámal, *K šedesátinám Otakara Borůvky*. Čas. pěst. mat. 84, 1959, 236–250.

[A2] M. Holub, *Šedesát let prof. O. Borůvky*. Vesmír, 38, 1959, 203.

[A3] K. Koutský, *Prof. Otakar Borůvka šedesátníkem a laureátem státní ceny*. Pokroky mat. fyz. astr. 4, 1959, 730–733.

[A4] M. Novotný, *Borůvka laureátem státní ceny*. Věda a život, 1959.

[A5] J. Kurzweil, *Člen korespondent ČSAV Otakar Borůvka vyznamenán státní cenou Klementa Gottwalda.* Čas. pěst. mat. 84, 1959, 489–491.

[A6] J. Kurzweil, *Член–корреспондент ЧСАН Отакар Борувка удостойен государственной премии имени Клемента Готтвальда.* Czech. Math. J. 9 (84), 1959, 631–634.

[A7] M. Sekanina, *Šedesátiny profesora Otakara Borůvky.* Rozhledy matematicko-fyzikální 37, 1959, 6, 280–281.

[A8] F. Balada, *Akademik korespond. univ. profesor RNDr. Otakar Borůvka, doktor fyzikálně-matematických věd, dožil se šedesáti let.* Matematika ve škole 9, 1959, 5, 324–328.

[A9] L. Kosmák, *Vyznamenání prof. Koutského a prof. Borůvky*. Universitas 11/1963, 6.

[A10] M. Novotný, *70 let akademika Borůvky.* Universitas 2/1969, 115–116.

[A11] M. Novotný, *Akademik O. Borůvka sedmdesátiletý*. Pokroky mat. fyz. astr. 14, 1969, 198–199.

[A12] M. Ráb, *Akademik Otakar Borůvka sedmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. 94, 1969, 244–247.

[A13] M. Ráb, *Seventieth Birthday of Professor Otakar Borůvka*. Czech. Math. J. 19 (94), 1969, 369–373.

[A14] M. Novotný, *Otakar Borůvka – význačná osobnost brněnského vědeckého života*. Pokroky mat. fyz. astr. 19, 1974, 146–150.

[A15] Z. Vejvodová, *75 let akademika Otakara Borůvky*. Vesmír 53, 1974, 186.

[A16] M. Greguš, *Osemdesiat rokov akademika O. Borůvku.* Pokroky mat. fyz. astr. 24, 1979, 177–178.

[A17] L. Berger, *Seminár o matematike. Súľov 3. – 5. máj 1979*, Čas. pěst. mat. 104, 1979, 427–430.

[A18] J. Kurzweil, *K osmdesátinám akademika Otakara Borůvky*. Vesmír 58, 1979, 154.

[A19] F. Neuman, *Akademik Otakar Borůvka osmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. 104, 1979, 214–219.

[A20] F. Neuman, *The Eightieth Birthday of Academician Otakar Borůvka.* Czech. Math. J. 29 (104), 1979, 330–335.

[A21] M. Greguš, *Eighty years of Professor Otakar Borůvka*. Acta Math. Univ. Comenian. 39, 1980, 7–8.

[A22] F. Neuman, *Akademik Otakar Borůvka pětaosmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. 109, 1984, 217–220.

[A23] F. Neuman, *85 Years of Academician Otakar Borůvka.* Czech. Math. J. 34 (109), 1984, 488–489.

[A24] M. Sekanina, *Jubileum Otakara Borůvky*. Universitas 3/1984.

[A25] V. Novák, *Akademik Otakar Borůvka devadesátiletý.* Pokroky mat. fyz. astr. 34, 1989, 65–71.

[A26] V. Novák, B. Půža, *Akademik Otakar Borůvka devadesátiletý*. Universitas 3/1989, 98–99.

[A27] E. Fuchs, *Akademik Otakar Borůvka.* Rovnost 6. 5. 1989.

[A28] M. Laitoch, B. Půža, *K devadesátinám Otakara Borůvky*. Universitas 5/1989, 72–73.

[A29] V. Šeda, *Spomienka na pôsobenie akademika O. Borůvku v Bratislavě pri príležitosti jeho deväťdesiatych narodenín*. Pokroky mat. fyz. astr. 34, 1989, 243–244.

[A30] F. Neuman, *Akademik Otakar Borůvka devadesátníkem*. Čas. pěst. mat. 114, 1989, 210–213.

[A31] F. Neuman, *Academician Otakar Borůvka nonagerian.* Czech. Math. J. 39 (114), 1989, 382–384.

[A32] *Academician Otakar Borůvka*. Arch. math. 26, 1990, no. 2–3, 65–66.

[A33] *Významné osobnosti našeho města – Otakar Borůvka.* Ostrožské listy, 7–8, Uherský Ostroh, 1992.

[A34] V. Novák, B. Půža, *Otakar Borůvka*. Universitní noviny, 4/1994, 16.

[A35] *Jubileum akademika Otakara Borůvky*. Rovnost 10. 5. 1994.
[A36] F. Neuman, *95 years of Otakar Borůvka*. Czech. Math. J. 44 (119), 1994, 179–181.
[A37] F. Neuman, *95 years of Otakar Borůvka*. Math. Bohemica 119, 1994, 97–99.
[A38] *Jubileum vědce*. Brněnský večerník 9. 5. 1995, 4.
[A39] F. Neuman, *Otakar Borůvka died*. Czech. Math. J. 45 (120), 1995, 767–768.
[A40] F. Neuman *Otakar Borůvka died*. Arch. math. 31, 1995, no. 3.
[A41] M. Greguš, *Prof. RNDr. Otakar Borůvka [1899–1995] died*. Math. Slovaca 45, 1995, no. 5, 543–544.
[A42] F. Neuman, *Otakar Borůvka died*. Math. Bohemica 121, 1996, no. 1, 107–108.
[A43] Z. Třešňák, P. Šarmanová, B. Půža, *Otakar Borůvka*. Universitas Masarykiana, Brno, 1996, 240 str.
[A44] V. Novák, B. Půža, P. Šarmanová, *Vzpomínka na profesora Otakara Borůvku*. Univerzitní noviny 5/1996, 19–20.
[A45] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Folia Historica 43, Faculty of Science Masaryk University Brno, 1996, 3 str.
[A46] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Učitel matematiky 1/1996, JČMF, 15–18.
[A47] P. Šarmanová, *Čtyřrozměrný model života a Otakar Borůvka*. Informace MVS, 48, 1996, 29–36.
[A48] P. Šarmanová, *From the recollections of Otakar Borůvka – the founder of the Brno school of differential equations*. Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 9–12.
[A49] F. Neuman, *Otakar Borůvka, his life and work*. Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 2–8.

B) Materiály z archivu O. Borůvky

[B1] *Úkoly a cesty matematiky.* Přednáška na XV. výroční schůzi Moravskoslezské akademie věd přírodních v Brně 21. 2. 1952. Dále prosloveno v Bratislavě 21. 4. 1952.
[B2] *Nové výsledky v teorii diferenciálních rovnic.* Přednáška na I. vědecké konferenci MU v Brně 20. 2. 1954.
[B3] *Hlavní směry současné matematiky a vědecké práce v matematice v ČSR.* Přednáška na II. vědecké konferenci MU 1955. Dále prosloveno na schůzi JČMF v Bratislavě 8. 11. 1955.
[B4] *O vědecké práci v matematice na přírodovědecké fakultě university v Brně v posledních 10 letech.* Přednáška na schůzi katedry matematiky Přf. MU 27. 2. 1958.
[B5] *Několik pohledů na moderní matematiku z hlediska vědecké práce v matematice u nás.* Přednáška na schůzi ÚV JČMF v Praze 29. 4. 1958.
[B6] *O vývoji prací v oboru diferenciálních rovnic na zdejší fakultě.* Přednáška proslovená na sjezdu absolventů fakulty 20. 11. 1959.
[B7] *O rozvoji matematiky za posledních 15 let.* Beseda v universitním agitačním středisku v Brně 17. 5. 1960.
[B8] *Aktuální otázky matematiky.* Přednáška na II. absolventském sjezdu Přf. UJEP 26. 1. 1962. Dále prosloveno na besedě oboru matematiky Přf. UJEP 4. 12. 1962.
[B9] *Matematika ve službách společnosti.* Přednáška proslovená v cyklu přednášek Lidové university pořádané SSPVZ v Brně 1. 3. 1962.
[B10] *Jubilejní vzpomínka na JČMF v Brně.* Přednáška na schůzi brněnské pobočky JČMF 24. 4. 1963.
[B11] *Pohledy z dálky a zblízka na rozvoj matematiky v posledních dvaceti letech.* Přednáška v rámci oslav 20. výročí osvobození naší vlasti 16. 2. 1965.
[B12] *Několik vzpomínek na matematický život v Brně v posledních 50ti letech.* Beseda uspořádaná JČSMF v Praze 20. 5. 1976.
[B13] *Rozvoj matematiky v Brně v uplynulých 30ti letech.* Přednáška na slavnostní schůzi brněnské pobočky JČSMF 18. 5. 1978.
[B14] *O vzniku a osudech některých mých vědeckých výsledků.* Přednáška v JSMF v Bratislavě 7. 6. 1979.

[B15] *Rozvoj matematiky v Československu v posledních 60ti letech.* Přednáška na schůzi abiturientů gymnázia v Uherském Hradišti 1. 6. 1980.
[B16] *Z mého života.*
[B17] *Akademik Borůvka vzpomíná...* Úryvek z rozsáhlých Vzpomínek na život, práci a setkání s významnými osobnostmi. Zpracování na základě magnetofonových záznamů, 8 str.
[B18] Zprávy o činnosti matematického semináře pro studenty z let 1945 – 1950.
[B19] Hlášení o postupu výzkumných prací z let 1951 – 1966.
[B20] Osobní poznámky a presenční listiny ze seminářů z let 1951 –1966.
[B21] Zprávy o činnosti O. Borůvky z let 1943 – 1967.
[B22] Zprávy o zahraničních cestách O. Borůvky.
[B23] Korespondence O. Borůvky z let 1940 – 1967.

C) Další materiály

[C1] *Dějiny university v Brně*. Vydala UJEP, Brno, 1969, 430 str.
[C2] R. Košťál, *Vznik a vývoj pobočky JČMF v Brně*. Vydala JČMF, Praha, 1968, 192 str.
[C3] *Vývoj matematiky v ČSR v období 1945 – 1985 a její perspektivy*. Univerzita Karlova, Praha, 1986.
[C4] *Ročenka brněnské univerzity 1964 – 1968*. Vydala UJEP, Brno, 1969, 750 str.
[C5] Seznamy přednášek Přírodovědecké fakulty MU z let 1919 – 1960.
[C6] Záznamy na magnetofonových páscích s vyprávěním O. Borůvky, jež byly pořízeny při příležitosti jeho 90. narozenin oddělením nových dějin Moravského muzea v Brně.
[C7] Osobní spis O. Borůvky – Archiv AV ČR v Praze.
[C8] Osobní spis O. Borůvky – Archiv MU v Brně.
[C9] V. Šeda, *K sedemdesiatinám prof. Marka Šveca, DrSc.* Čas. pěst. mat. 114, 1989, 412–435.
[C10] M. Gera, A. Haščák, *K životnému jubileu profesora Šedu.* Math. Bohemica 116, 1991, 439–444.
[C11] V. Šeda, *Profesor Michal Greguš šesťdesiatročný.* Čas. pěst. mat. 111, 1986, 437–444.
[C12] S. Staněk, *Životní jubileum profesora Miroslava Laitocha.* Čas. pěst. mat. 107, 1982, 204–208.
[C13] M. Ráb, *K šedesátinám profesora Miloše Zlámala*. Čas. pěst. mat. 109, 1984, 436–441.
[C14] V. Novák, B. Půža, *Sixty years of professor Miloš Ráb.* Czech. Math. J., 39 (114) 1989, 187–191.
[C15] Materiály I. sekce ČSAV – Archiv AV ČR v Praze.
[C16] *Mathematical Reviews* z let 1953 – 1986.
[C17] *Zentralblatt für Mathematik* z let 1953 – 1986.
[C18] F. Neuman, *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations.* Kluwer Acad. Publ. & Academia, Dordrecht–Boston–London & Praha 1991, 320 str.
[C19] L. M. Berkovich, N. H. Rozov, *Transformations of linear differential equations of second order and adjoined nonlinear equations.* Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 75–98.
[C20] F. Neuman, *Transformation theory of linear ordinary differential equations – from local to global investigations.* Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 65–74.
[C21] J. H. Barrett, *Disconjugacy of second-order linear differential equations with non-negative coefficients.* Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 552–561.
[C22] M. Greguš, *Lineárna diferenciálna rovnica tretieho rádu.* Veda SAV, Bratislava, 1981, 208 str.

Otakar Borůvka a diferenciální rovnice

Petra Šarmanová

Abstrakt

Významný český matematik Otakar Borůvka za svého života výrazně zasáhl do několika matematických disciplín – do matematické analýzy, teorie grafů, diferenciální geometrie, algebry a diferenciálních rovnic.

Tato práce je věnována činnosti O. Borůvky v teorii obyčejných diferenciálních rovnic, jíž věnoval nejdelší část svého života a nejvíce vědeckých publikací. Přínos O. Borůvky v této oblasti lze shrnout do tří hlavních bodů:

1. Vytvoření ucelené teorie globálních transformací obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.
2. Založení semináře pro studium diferenciálních rovnic, který je v jisté formě činný dodnes.
3. Vliv na vědeckou činnost řady brněnských i mimobrněnských matematiků, z nichž mnozí jsou dnes světovými odborníky v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic.

Cílem této práce je zmapovat období, které začíná rozhodnutím O. Borůvky věnovat se diferenciálním rovnicím (1943 – 1944) a končí vydáním německé monografie *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* roku 1967, ukázat jeho pedagogickou a vědeckou činnost v této době a podat matematický výklad jeho teorie fází, dispersí a transformací.

Práce je rozdělena na pět hlavních částí. První část stručně zachycuje život a dílo O. Borůvky a ukazuje souvislosti, které vedly k rozhodnutí O. Borůvky věnovat se diferenciálním rovnicím.

Druhá část podává přehled o pedagogické činnosti O. Borůvky do roku 1950. Největší pozornost je přitom věnována přednáškové činnosti O. Borůvky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v období poválečném, obzvláště seminářům o diferenciálních rovnicích.

Třetí část má odlišný charakter než ostatní části práce. Jedná se o matematický výklad hlavních výsledků Borůvkovy teorie fází, dispersí a transformací, jenž je shrnuta v monografii *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967). Na rozdíl od zmíněné monografie je však výklad veden v „dnes používaném matematickém stylu", tj. základní pojmy jsou uvedeny v definicích, základní výsledky ve větách. Nejdůležitější věty jsou dokázány, přičemž jejich důkaz je mnohdy odlišný od Borůvkova důkazu.

Čtvrtá část je věnována vědecké činnosti O. Borůvky v letech 1940 – 1966. Hlavní pozornost je zaměřena na vznik a činnost semináře pro studium diferenciálních rovnic. Jsou zde podrobně zaznamenána témata probíraná v tomto semináři, čímž je možno sledovat postupný vznik a vývoj Borůvkovy teorie globálních transformací a také vliv na ostatní matematiky a jejich vědeckou a publikační činnost. Tato část také zahrnuje podrobný přehled zahraničních cest a mezinárodních konferencí do roku 1966, na nichž O. Borůvka proslovil přednášku týkající se diferenciálních rovnic.

V páté části je uveden seznam a charakteristika prací O. Borůvky, jež se týkají teorie fází, dispersí a transformací. Tato charakteristika vychází z recenzí uvedených v *Mathematical Reviews* nebo v *Zentralblatt für Mathematik*. Dále tato část obsahuje historicky zajímavé poznámky ke

vzniku a osudu některých Borůvkových prací. Osvětlíme zde také důvody nevydání učebnice o diferenciálních rovnicích, na níž O. Borůvka pracoval mnoho let.

Součástí práce jsou také přílohy, které přináší přehled vzdělání a zaměstnání O. Borůvky, seznam profesorů a docentů matematiky na Masarykově univerzitě v letech 1920 – 1967 a soupisy disertačních prací z diferenciálních rovnic, jež vedly k udělení hodnosti doktora přírodních věd, hodnosti kandidáta věd a hodnosti doktora věd na brněnské univerzitě a rozmezí let 1920 – 1967.

Hlavním pramenem při zpracování práce byl archiv O. Borůvky, jenž je uložen v bývalé pracovně O. Borůvky v Brně na Janáčkově náměstí 2a. Díky pečlivosti O. Borůvky, s níž uchovával svou korespondenci a zápisy ze seminářů, zahraničních cest a jiných svých aktivit, je možno s velkou přesností zmapovat jeho činnost v daném období. Další materiály byly získány v archivu AV ČR v Praze, v publikacích brněnské univerzity a v článcích o O. Borůvkovi, jejichž ucelený přehled je také součástí práce.

Seznam publikací

[1] Z. Třešňák, B. Půža, P. Šarmanová [33%], *Otakar Borůvka*. Universitas Masarykiana, 1996, 240 str.

[2] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Folia Historica 43, Faculty of Science Masaryk University Brno, 1996, 3 str.

[3] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Učitel matematiky 1/1996, JČMF, 15–18.

[4] P. Šarmanová, *From the recollections of Otakar Borůvka – the founder of the Brno school of differential equations*. Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 9–12.

Otakar Borůvka and differential equations

Petra Šarmanová

Abstract

Noted Czech mathematician Otakar Borůvka influenced significantly several branches of mathematics during his life, namely mathematical analysis, graph theory, differential geometry, algebra and differential equations.

This thesis deals with O. Borůvka's work in the field of ordinary differential equations, to which he devoted the longest part of his life and the most of his scientific papers. His contribution to this subject may be summarized in the three main points:

1. Creation of the theory of global transformations of ordinary linear differential equations of second order.
2. Foundation of a seminar for study of differential equations, which is in certain form still working up to the present day.
3. Influence on scientific activities of series of Czech mathematicians, many of them are world-known specialists in the area of ordinary differential equations today.

The aim of this thesis is to map the period of O. Borůvka's life beginning with his decision to work in the field of differential equations (1943 – 1944) and ending with the publication of a monograph (in German) *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* in 1967 as well as to show his pedagogical and scientific activities during this period and to give mathematical comment on his theory of phases, dispersions and transformations.

The thesis is divided into five main parts. The first part describes in brief the life and the work of O. Borůvka and points out the circumstances leading to his decision to work in the field of differential equations.

The second part presents a survey of pedagogical activities of O. Borůvka until 1950. The attention is paid mainly to his lectures delivered at Faculty of Science of Masaryk University after the war, particularly to his seminars on differential equations.

The third part of this work has a different character than the others. It consists of mathematical interpretation of the main results of Borůvka's theory of phases, dispersions and transformations described in the monograph *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967). In contrast to the above mentioned monograph the interpretation is performed in „present-day mathematical style“, i. e. the basic concepts are presented in definitions, basic results in the theorems. The most important theorems are proven and the proof often varies from Borůvka's original proof.

The fourth part is dedicated to scientific work of O. Borůvka between 1940 – 1966. The attention is paid in particular to the foundation and the activities of the seminar for study of differential equations. The topics discussed at the seminar are described in detail, which enables to trace gradual creation and development of Borůvka's theory of global transformations as well as his influence on other mathematicians and their scientific and publication activities. This part

also includes detailed survey of Borůvka's travels abroad and the international conferences where he read his lectures on differential equations.

The fifth part consists of the list of O. Borůvka's publications concerning theory of phases, dispersions and transformations and their characterization. This characterization is based on the reviews published in *Mathematical Rewiews* or *Zentralblatt für Mathematik*. This part also includes a few remarks upon the events concerning some Borůvka's publications, which are interesting from historical point of view. We shall also show here the reasons why the textbook on differential equations prepared by O. Borůvka for many years has never been published.

The thesis includes also appendices with well-arranged data concerning O. Borůvka's education and employments, list of professors and associate professors of mathematics at Masaryk University between 1920 – 1967 and list of thesis dealing with differential equations leading to RNDr., CSc. and DrSc. degrees at Masaryk University between 1920 – 1967.

As the main source of this thesis served O. Borůvka's archives, located at his former study in Brno, Janáčkovo náměstí 2a. Thanks to the carefulness with which O. Borůvka stored his correspondence and his notes from the seminars, travels abroad and his other activities, we can with great accuracy map his work during this period. Some other materials were obtained from the archives of the Academy of Sciences of Czech Republic in Prague, publications of Masaryk University and the articles about O. Borůvka. The list of these articles is also a part of this thesis.

Related publications

[1] Z. Třešňák, B. Půža, P. Šarmanová [33%], *Otakar Borůvka*. Universitas Masarykiana, 1996, 240 str.

[2] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Folia Historica 43, Faculty of Science Masaryk University Brno, 1996, 3 str.

[3] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Učitel matematiky 1/1996, JČMF, 15–18.

[4] P. Šarmanová, *From the recollections of Otakar Borůvka – the founder of the Brno school of differential equations*. Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 9–12.

Životopis

Jméno: Mgr. Petra Šarmanová

Bydliště: Studentská 1771, Ostrava-Poruba, 708 00

Zaměstnavatel: Fakulta elektrotechniky a informatiky, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu, Ostrava-Poruba, 708 33

Vzdělání:

1985–1989 Gymnázium Kyjov

1989–1994 Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, obor učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů, aprobace matematika – výpočetní technika

1994–1998 Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, postgraduální studium, obor obecné otázky matematiky a informatiky

Praxe:

1992–1994 Studentská vědecká síla, Ústav výpočetní techniky Masarykovy univerzity v Brně

1996–dosud Odborná asistentka, katedra aplikované matematiky Fakulty elektrotechniky a informatiky, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Publikační činnost:

[1] Z. Třešňák, P. Šarmanová, B. Půža, *Otakar Borůvka*. Universitas Masarykiana, 1996, 240 str.

[2] Š. Schwabik, P. Šarmanová, *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, 1996, 95 str.

[3] V. Novák, B. Půža, P. Šarmanová, *Vzpomínka na profesora Otakara Borůvku*. Univerzitní noviny 5/1996, 19–20.

[4] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Folia Historica 43, Faculty of Science Masaryk University Brno, 1996, 3 str.

[5] P. Šišma, P. Šarmanová, *Matyáš Lerch*. Folia Historica 42, Faculty of Science Masaryk University Brno, 1996, 3 str.

[6] P. Šarmanová, *Otakar Borůvka*. Učitel matematiky 1/1996, JČMF, 15–18.

[7] P. Šarmanová, *Čtyřrozměrný model života a Otakar Borůvka*. Informace MVS 48, 1996, 29–36.

[8] P. Šarmanová, *From the recollections of Otakar Borůvka – the founder of the Brno school of differential equations*. Arch. math. 33, 1997, no. 1–2, 9–12.

Otakar Borůvka a diferenciální rovnice

Mgr. Petra Šarmanová

Tato disertační práce byla vypracována v rámci postgraduálního studia na katedře matematiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně.

Obor: Obecné otázky matematiky a informatiky

Školitel: Doc. RNDr. Zuzana Došlá, CSc.
katedra matematiky Přírodovědecké fakulty MU v Brně

Předseda komise: Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
katedra matematiky Přírodovědecké fakulty MU v Brně

Členové komise:

Oponenti:

Datum konání obhajoby: